DIE GRÖSSE DER MUSIKALISCHEN INTERVALLE ALS GRUNDLAGE DER HARMONIE

Heinrich Bellermann

186

Die

Grösse der musikalischen Intervalle

als Grundlage der

Harmonie

von

Heinrich Bellermann.

Mit 2 lithographirten Tafeln.

Berlin 1873.

Verlag von Julius Springer.

Die

Grösse der musikalischen Intervalle

als Grundlage der

Harmonie

von

Heinrich Bellermann.

Mit 2 lithographirten Tafeln.

Berlin 1873,
Verlag von Julius Springer.

Vorwort.

Im unbegleiteten Gesange haben die Sänger das Bestreben alle consonirenden, d. h. alle im Dreiklange und seinen Umkehrungen enthaltenen Intervalle wirklich rein, ihren einfachen Schwingungsverhältnissen gemäss auszuführen; sie können sich daher keiner feststehenden, vorher in ihren Verhältnissen genau zu bestimmenden oder gar vorher abgestimmten temperirten Scala bedienen, sondern müssen im Gegentheil, um jene Reinheit der Intervalle zu erzielen, bald mit dieser bald mit jener Tonstufe, bald aufwärts bald abwärts um eine Kleinigkeit ausweichen. In welcher Weise dies geschieht, versucht die vorliegende kleine Schrift zu zeigen.

Ich bin mir wohl bewusst, dass durch die nachfolgenden Betrachtungen der Gegenstand keineswegs völlig erschöpft ist, und dass in der Praxis eine grosse Menge von Fällen vorkommen, die hier nicht bedacht sind und deren Erklärung grosse Schwierigkeiten haben dürfte. Doch scheint mir der Zweck erreicht zu sein, wenn es mir durch meine Auseinandersetzungen nachzuweisen gelungen sein sollte, dass eine vollkommen reine Musik (selbst innerhalb der engen Gränzen Einer Tonart) nur bei einer Beweglichkeit aller Tonstufen möglich ist und dass diese Beweglichkeit gerade mit zum Wesen der wahren Harmonie gehört.

Berlin im December 1872.

H. B.

Berichtigungen.

Seite 30 § 47 muss das erste Verhältniss der verminderten Septime heissen **75 : 128 (1,706666..),** statt 57 : 128 (1,72).

Seite 44 § 60 muss es heissen: Von den Intervallen auf der obigen Tabelle **§ 57,** statt § 59.

Inhalt.

Einleitung	§ 1.
Geräusch, Schall, Klang u. s. w.	§ 2.
Definition des musikalischen Tones	§ 3—6.
Intervall, ein mathematisches Verhältniss bildend	§ 7.
Die einfacheren Verhältnisse geben die Consonanzen	§ 8.
Die complicirteren die Dissonanzen	§ 9.
Von den Consonanzen insbesondere	§ 10—15.
Octavenversetzung	§ 16—17.
Verbindung dreier unter sich consonirender Töne	§ 18.
Umkehrungen und Versetzungen des Dreiklanges	§ 19.
Die mitklingenden Töne einer Saite	§ 20—23.
Die Intervalle wurden in früheren Zeiten nach Saitenlängen bestimmt	§ 24.
Saiten durch Gewichte gespannt	§ 25.
Bildung der diatonischen Tonleiter aus den drei Dreiklängen auf *C*, *F* u. *G*	§ 26—28.
Grosser und kleiner ganzer Ton, halber Ton, syntonisches Komma	§ 29.
Bemerkungen über das syntonische Komma	§ 30—31.
Die Dissonanzen der diatonischen Tonleiter	§ 32.
Gränze zwischen Consonanzen und Dissonanzen	§ 33.
Die Zahl 7 und der Ton *i*.	§ 34.
Die Consonanzen sind zum Theil rein, zum Theil unrein	§ 35.
Die Octave	§ 36.
Die Quinte	§ 37.
Die Quarte	§ 38.
Die grosse Terz	§ 39.
Die kleine Terz	§ 40.
Die kleine Sexte	§ 41.
Die grosse Sexte	§ 42.
Die Grösse der Dissonanzen	§ 43.
Das syntonische Komma als Grund der Unreinheit	§ 44.
Die verminderte kleine Terz = 27 : 32	§ 45—47.
Grosser und kleiner ganzer Ton in der Praxis	§ 48.
Sämmtliche Intervalle der diatonischen Tonleiter mit ihren Gattungen	§ 49.
Die Octavengattungen, beiläufige Bemerkung über dieselben	§ 50.
Das ♯ und ♭	§ 51.
Limma und Apotome und ihre Grössen	§ 52—55.
Die kleineren Intervalle, wie Diesis, Drittelton u. s. w.	§ 56.

Die Theilung des ganzen Tones durch die verschiedenen sogenannten halben Töne, hierzu eine lithographische Darstellung . . . . . § 57.
Die kleine Diesis . . . . § 58.
Ueber den Gebrauch der Wörter Limma und Apotome in gegenwärtiger Abhandlung . . . . § 59.
Pythagorisches Komma und Schisma . . . . § 60.
Reinheit der Intervalle nur beim Gesange möglich . . . . § 61.
Temperatur beim Gesange . . . . § 62.
Wie dieselbe herzustellen . . . . § 63—65.
Die alterirten Intervalle . . . . § 66—67.

Erweiterung des Systems durch Hinzufügung neuer diatonischer Systeme § 68—69.
Die Tonarten bilden keinen Zirkel . . . . § 70.
Berechnung der zwölften Quinte . . . . § 71.
Die nach reinen Quinten berechnete chromatische Tonleiter . . . . § 72.
Die freiere Modulation und das Instrumentenspiel führte zu feststehenden Temperaturen . . . . § 73.

Die gleichschwebende Temperatur, ein Surrogat für die wahre Harmonie § 74—75.
Berechnung der gleichschwebenden Temperatur . . . . § 76.
Die Grösse der gleichschwebend-temperirten Intervalle verglichen mit den natürlichen . . . . § 77.
Klang derselben . . . . § 78.
Hierhergehörige Bemerkungen für die praktische Musik . . . . . . § 79—80.
Ungleichschwebende Temperatur . . . . § 81.
Doppelte und mehrfache Claviaturen, um auf Instrumenten reine Intervalle spielen zu können. . . . . § 82—83.

Die akustischen Verhältnisse der diatonischen Tonleiter bei den Alten § 84—88.
Beiläufige Bemerkungen über die Klanggeschlechter und Chroai der Alten . . . . § 89—91.
Das Mittelalter . . . . § 92.

Verzeichniss der in vorstehender Abhandlung vorkommenden Intervalle, nach der Grösse geordnet vom Einklang bis zur Octave . § 93.

Anhang, eine Anweisung, wie man ein graphisches Bild der Tonleiter mit allen ihren Intervallen entwerfen kann. Hierzu ein lithographisches Blatt . . . . § 94.

§ 1.

Die Grundlage der harmonischen Verhältnisse in der Musik (sowohl heutzutage als auch im Alterthum und im Mittelalter) bildet eine Reihe von Tönen, in welcher jedesmal mit der achten Stufe dieselbe Anordnung der Intervalle wiederkehrt und in welcher abwechselnd nach zwei grösseren Intervallen (sogenannten ganzen Tönen) und dann nach drei solchen ein kleineres Intervall, ein sogenannter halber Ton, folgt:

Diese so beschaffene Tonreihe, die wir uns nach beiden Richtungen hin, d. h. nach der Tiefe und nach der Höhe, ins Unendliche fortgesetzt denken können, nennen wir die diatonische Tonleiter, vorläufig ohne dass wir irgend einen ihrer Töne als ersten oder Anfangston oder Grundton auffassen. Den Verhältnissen dieser Tonleiter wollen wir zunächst unsere Betrachtung widmen und untersuchen, wie man in den verschiedenen Zeiten durch Berechnung die Grösse der in ihr vorkommenden Intervalle festgestellt hat. Denn wenn auch die Tonleiter zu allen Zeiten in ihrem ganzen Bau dieselbe geblieben ist, so sind doch die Ansichten über ihre Entstehung und die Vorstellungen, welche man von der Grösse und Beschaffenheit der in ihr vorkommenden Intervalle verband, sehr verschiedenartig gewesen, und namentlich weicht die aus dem Alterthum herstammende Berechnungsart sehr von derjenigen ab, die sich später seit Entwickelung der mehrstimmigen Musik Geltung verschafft hat. Letztere genau kennen zu lernen, ist natürlich für die moderne, d. h. mehrstimmige Musik von besonderer Wichtigkeit.

§ 2.

Wenn man den gemeinschaftlichen Begriff, welcher den Ausdrücken Klang, Schall, Laut, Ton, Geräusch und ähnlichen zu Grunde liegt, durch einen derselben, z. B. durch Klang bezeichnet, so ist Klang die dem Gehöre vernehmbare Bewegung der Körper. Euklid fängt seine Schrift über die Theilung der Saite (*κατατομὴ κανόνος*) mit den Worten an: »Wenn Ruhe und Unbeweglichkeit stattfände, so würde Schweigen »sein und wenn sich nichts bewegte, würde nichts gehört werden«, (*Εἰ ἡσυχία εἴη καὶ ἀκινησία, σιωπὴ ἂν εἴη· σιωπῆς δὲ οὔσης καὶ μηδενὸς κινουμένου, οὐδὲν ἂν ἀκούοιτο*). Von den mancherlei Eigenschaften, welche die Klänge haben können und wonach wir sie stark, schwach, dumpf, schwirrend, kreischend, brummend u. s. w. nennen, giebt es auch eine, die wir durch den Ausdruck Höhe bezeichnen und die einem jeden Klange, dem einen in grösserem, dem anderen in geringerem Maasse zukommt, so dass je zwei Klänge in Betreff dieser Eigenschaft sich mit einander vergleichen lassen und entweder als gleich, oder als ungleich befunden werden, in welchem letzteren Falle der eine höher, der andere tiefer heisst. Von dem Begriff der Höhe und Tiefe aber, da er das Resultat einer unmittelbaren Wahrnehmung des Ohres ist, lässt sich eben so wenig eine Definition geben, wie von den aus den Wahrnehmungen anderer Sinnesorgane hervorgehenden Begriffen, z. B. von süss und sauer, von roth und blau, u. a. — Wohl kann man aber die in der Natur begründete Ursache dieser Eigenschaften angeben. Man weiss z. B. dass durch die chemische Verbindung dieser oder jener Stoffe ein saurer oder süsser Geschmack entsteht; man weiss ferner, dass die Körper auf verschiedene Weise die Strahlen des Lichtes aufnehmen und ausstrahlen, und hierdurch in verschiedenen Farben erscheinen. Auf eine dem entsprechende Weise muss man von den tieferen Klängen sagen, dass sie durch langsamere, von den höheren, dass sie durch schnellere Bewegungen hervorgebracht werden.

§ 3.

Wenn ein Körper in Bewegung gesetzt wird, so theilt sich dieselbe der Luft mit und gelangt so zu unsern Gehörsnerven. Da die Körper aber oft von unregelmässiger Gestalt, oft aus den verschiedenartigsten Substanzen zusammengesetzt sind, so folgen ihre zitternden Bewegungen

so ungleichmässig auf einander, dass ihr Klang in jedem Augenblicke von verschiedener Höhe ist. Andere regelmässigere Körper, z. B. eine ausgespannte Saite, lassen ihre Schwingungen dagegen in ganz gleichmässigen Zeiträumen auf einander folgen, und einen solchen Klang, welcher wegen der Gleichmässigkeit der ihn hervorbringenden Schwingungen auf einerlei Höhe bleibt, nennen wir Ton. Töne unterscheiden sich also von anderen Klängen durch die Stetigkeit ihrer Höhe. Diese bilden das Material der Musik.

§ 4.

Zwischen je zwei auf verschiedener Höhe befindlichen Tönen giebt es eine unendliche Menge Zwischentöne, so wie zwischen je zwei Bewegungen von verschiedener Geschwindigkeit eine unendliche Menge mittlerer Geschwindigkeiten denkbar ist. Geschähe nun der Uebergang von einem Ton zu einem andern durch die sämmtlichen unendlich vielen Zwischenstufen, so würden hierdurch Klänge entstehen, die, weil ihnen die Stetigkeit der Höhe fehlt, keine Töne und folglich für die Musik unbrauchbar wären. Es gehört nämlich zum Wesen der Musik, dass der Uebergang von einem Tone zu einem andern mit Ueberspringung jener unendlich vielen Zwischenstufen geschieht, d. h. dass die einzelnen Töne durch Zwischenräume aus einander gehalten werden. Den Zwischenraum oder die Entfernung zweier Töne von einander nennt man Intervall. Nach diesen Auseinandersetzungen sind also die musikalischen Töne solche Klänge, die während ihrer ganzen Dauer auf einerlei Höhe bleiben und in Intervallen zu einander überschreiten.

§ 5.

Diese Definition des musikalischen Tones ist hier ganz in Uebereinstimmung mit den Erklärungen verschiedener griechischer Schriftsteller z. B. Gaudentius, Bacchius senior, Ptolemaeus u. a. gegeben. Diese sagen nämlich, der musikalische Ton (ὁ φθόγγος) unterscheidet sich vom sonstigen Laut oder Klange (ὁ ἦχος, ἡ ἠχή) dadurch, dass er einige Zeit hindurch auf einerlei Tonhöhe stehen bleibt (ἕστηκεν ἐπὶ μιᾶς τάσεως) also sich gleich bleibt (ὅμοιος ἑαυτῷ ἐστι), dass er keine Breite hat (ἀπλατής ἐστι). Dies letzte ist so zu verstehen, dass der musikalische Ton dem Ohre gleichsam so erscheint, wie dem Auge eine Linie, denn unter der Breite (τό πλάτος) eines Tones verstehen sie, dass seine

Intonation unbestimmt ist, d. h. nach der Tiefe und Höhe hin- und herschwankt, während der musikalische Ton dieses Schwanken nicht hat, sondern ihm im Gegentheil ein Bleiben (*μονή*), oder Einerleiheit (*ταὐτότης*) seiner Tonhöhe eigen ist. — Dies ist auch der Unterschied zwischen Sprech- und Singstimme. Die Singstimme schreitet in Intervallen fort, welche sie unmerkbar überschreitet, (*ὑπερβαίνει τὰ διαστήματα ἀφανῶς*). Sie ist also eine *διαστηματικὴ φωνῆς κίνησις*, eine intervallenmässige Bewegung der Stimme, während die Sprechstimme (die *φωνὴ λογική*) die Töne zusammenhängend d. h. ohne Intervalle hat, (*συνεχεῖς*). — Diesen Gegensatz der *λογικὴ* oder *συνεχὴς κίνησις* der Stimme zur *μελῳδικὴ* oder *ἐμμελὴς* giebt Bacchius senior pag. 16 an. Ptolemaeus vergleicht Buch I, cap. 4 die Sprechstimme mit den Farben des Regenbogens, weil man bei dieser Höhe und Tiefe in einander übergehen hört, wie die Farben des Regenbogens sichtbar in einander übergehen. Die hörbar nach der Tiefe übergehende Stimme vergleicht er mit dem Ende des Ochsengebrülles (*βουκανισμοὶ λήγοντες*, zu Ende gehendes Stiergebrüll) und die nach der Höhe übergehende mit dem *ὠρυγμοὶ λύκων*, dem Geheul der Wölfe. — Gaudentius vergleicht pag. 2 die Sprechstimme mit einem Fliessen (*ῥύσις*). — Nicomachus nennt pag. 3 und 4 die Gesangstimme *ἐνῳδὸς ἀσύγχυτος*, d. h. im Gesange vorkommend ist die Stimme nicht zusammengegossen. Er vergleicht sie vielmehr mit einem Haufen (*σωρός*) oder einem Zusammenhäufen (*σωρεία*), wo man die Theile unterscheiden kann. Die Sprechstimme vergleicht er dagegen mit einer Mischung (*ἔγκρασις*) von Flüssigkeiten, wo eine solche Unterscheidung der einzelnen Theile nicht möglich ist, u. s. w.

§ 6.

Aristoxenus spricht sich über den Unterschied von Sprechen und Singen folgendermaassen aus: »Sobald die Stimme sich so bewegt, dass »sie dem Gehöre nirgends stehen zu bleiben scheint, so nennen wir diese »Bewegung die stetige (oder zusammenhängende); wenn sie aber irgend»wo stehen zu bleiben scheint, dann wieder offenbar einen Raum durch»schreitet und dann sich wieder auf eine andere Tonhöhe zu stellen »scheint und dies abwechselnd fort bis zu Ende thut, so nennen wir »eine solche Bewegung eine intervallenmässige. Die stetige oder zu»sammenhängende nennen wir die sprechende; denn wenn wir spre»chen, bewegt sich die Stimme in der Weise, dass sie nirgends stehen zu

»bleiben scheint. Bei der andern aber, welche wir die intervallen- »mässige nennen, ist es umgekehrt: denn sie scheint stehen zu bleiben, »und jedermann nennt ein solches Verfahren nicht mehr Sprechen, »sondern Singen. Daher vermeiden wir beim Sprechen die Stimme »anzuhalten, wenn wir nicht etwa eines Affectes wegen genöthigt wer- »den, in solche Bewegung überzugehen; beim Singen aber thun wir das »Gegentheil; denn das Stetige (Zusammenhängende) vermeiden wir, »das Feststehen der Stimme aber suchen wir so viel als möglich. Denn »je mehr wir jeden Laut gesondert und feststehend und gleichmässig »hervorbringen, um so klarer erscheint der Empfindung die Melodie«. Das intervallenmässige Einherschreiten der Töne gehört also durchaus zum Wesen der Musik und es ist eine grosse Untugend gewisser Sänger und Instrumentenspieler (z. B. der Violinisten) wenn sie zur Erhöhung des Ausdruckes das Intervallenmässige durch ein Ineinanderziehen der Tonstufen aufheben. Sie suchen hier durch ein Mittel zu wirken, welches dem wahren Wesen der Musik und der Harmonie geradezu widerspricht.

§ 7.

Wir haben oben (§ 2) gesagt, dass von zwei verschiedenen Tönen der tiefere durch langsamere, der höhere durch schnellere Schwingungen hervorgebracht wird: sie stehen also in einem mathematischen Verhältniss zu einander. So bilden z. B. zwei Töne, deren Schwingungszahlen sich wie 1 : 2 verhalten, ein grösseres Intervall als zwei, deren Schwingungszahlen sich wie 2 : 3 verhalten u. s. w. — Das Intervall zweier Töne im Verhältniss 8 : 9 oder auch in dem von ihm wenig verschiedenen 9 : 10 nennen wir ganzen Ton; die ungefähre Hälfte eines solchen Intervalles 15 : 16 halben Ton. Dies sind die Intervalle aus denen die zu Anfang genannte diatonische Tonleiter besteht. Jeder auch nicht musikalisch gebildete Mensch, wenn er überhaupt musikalisches Gehör besitzt und die Töne der Höhe und Tiefe nach zu unterscheiden weiss, singt unwillkührlich in diesen Verhältnissen. Es hat diese Tonleiter nämlich in der Natur selbst ihren Ursprung, da sie, wie sich in dem Folgenden zeigen wird, aus einer Combination der einfachsten Zahlenverhältnisse hervorgegangen ist.

§ 8.

Wie der menschliche Verstand einfache Verhältnisse leichter als complicirtere zu übersehen im Stande ist, so fasst auch unser Ohr solche

Intervalle mit grösserer Sicherheit auf, denen ein einfaches Zahlenverhältniss zu Grunde liegt. Daher kommt es z. B., dass man eine Octave und Quinte mit der grössten Sicherheit vollkommen rein abstimmen kann, während dies schon bei einer grossen oder kleinen Terz um vieles schwieriger ist; ja, gewisse Intervalle der diatonischen Leiter, wie die Septimen oder gar der Tritonus und die falsche (verminderte) Quinte (von *f* nach *h* und von *h* nach *f*) dürften sich selbst nach vieler Uebung bei einem vorzüglich feinen Ohr kaum ohne äussere Hülfsmittel genau ihren Schwingungszahlen entsprechend abstimmen lassen.

§ 9.

Die einfacheren Verhältnisse sind die wohltönenderen und bilden die Consonanzen, jene complicirteren dagegen die Dissonanzen. Die Praxis der Kunst macht daher in der Anwendung und Behandlung beider einen wesentlichen Unterschied, indem sie jenen ersteren, den Consonanzen, als den für Ohr und Stimme fassbareren Intervallen viel grössere Freiheiten einräumt als den Dissonanzen, deren Ausführung oft schwierig ist. So lässt man (um ein Beispiel anzuführen) in einer guten, auf Kunstregeln basirenden mehrstimmigen Composition, namentlich wenn dieselbe von blossen Singestimmen ohne Hülfe einer Instrumentalbegleitung gesungen werden soll, die Dissonanzen nicht selbstständig auftreten, sondern bringt sie in solchen Verbindungen an, dass sie auf der betonten Zeit erscheinend, eine angemessene Vorbereitung und Auflösung durch und in Consonanzen erhalten, oder dass sie, auf der schlechten Taktzeit stehend, zwei Consonanzen im Durchgange verbinden:

während die Consonanzen dagegen jederzeit sich frei und selbstständig bewegen dürfen.

§ 10.

Aus der Zusammenstellung der von einem Tone aus gefundenen einfacheren oder consonirenden Intervalle entsteht dann die bereits beschriebene diatonische Tonleiter, welche wir als die Grundlage aller harmonischen Verhältnisse ansehen müssen.

Wir wollen zunächst diese consonirenden Intervalle einer näheren Betrachtung unterziehen.

§ 11.

Das einfachste Verhältniss, in welchem zwei Töne zu einander stehen können, ist der Einklang 1 : 1, doch ist dies blos eine Wiederholung ein und desselben Tones, und wir können ihn daher nicht eigentlich zu den Intervallen zählen. — Nächst diesem ist das einfachste Verhältniss 1 : 2, d. h. in dem Zeitraum, in welchem der tiefere Ton eine gewisse Anzahl Schwingungen macht, macht der höhere doppelt so viel. Dies ist die Octave z. B. $c — c'$. — Hierauf folgt das Verhältniss 2 : 3, d. h. in demselben Zeitraum, in welchem der tiefere zweimal schwingt, schwingt der höhere dreimal; das ist die Quinte, z. B. $c — g$. — Alsdann kommt das Verhältniss 3 : 4, die Quarte, z. B. $c — f$; und hierauf das Verhältniss 4 : 5, die grosse Terz, z. B. $c — e$. Diese Intervalle in Noten:

1 : 1, Einklang, 1 : 2, Octave, 2 : 3, Quinte, 3 : 4, Quarte, 4 : 5. Grosse Terz.

§ 12.

Diese hier genannten Intervalle genügen die ganze Tonleiter zu construiren. Sämmtlich sind sie Consonanzen, freilich nicht die einzigen, die in unserer modernen Musik zur Anwendung kommen, es fehlt noch die kleine Terz 5 : 6, z. B. $e — g$. Diese erhalten wir, wenn wir einem Tone, z. B. dem c, seine grosse Terz und Quinte geben, sie ist dann die Differenz dieser beiden Intervalle:

$$1 : \tfrac{5}{4} : \tfrac{3}{2} = 4 : 5 : 6$$
$$c — e — g. \qquad c — e — g.$$

Aus welchem Grunde wir hier die kleine Terz nicht selbstständig von c aus, also *es* aufstellen, wird sich sogleich weiter unten zeigen, wenn wir

von der Theilung der Saite oder der bei einem jeden Tone mitklingenden harmonischen Reihe sprechen. Ferner haben wir auch noch die Sexten, die grosse sowohl als die kleine, zu den Consonanzen zu zählen. Zur Erklärung dieser Dinge Folgendes:

§ 13.

Zwei Töne, welche in dem Verhältniss der Octave 1 : 2 stehen, consoniren so vollkommen und machen auf unser Ohr einen so übereinstimmenden Eindruck, dass wir sie mit demselben Namen benennen und uns vorstellen, wir haben denselben Ton zweimal vor uns, nur in einem verschiedenen Maassstabe. Aus dieser Eigenthümlichkeit des Verhältnisses 1 : 2 geht hervor, dass wir an einem Intervall nichts wesentliches ändern, wenn wir seine Töne um eine oder mehrere Octaven aus einander rücken. Nehmen wir z. B. die Quinte 2 : 3, so bleibt diese dem Wesen nach Quinte auch in den folgenden Fällen:

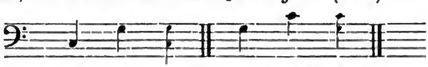
2 : 3 2 : 6 2 : 12
1 : 3 1 : 6 1 : 12.

Dasselbe gilt natürlich von allen anderen Intervallen auch. Des Beispiels wegen setze ich noch die Terz 4 : 5 *c*—*e* her:

4 : 5 4 : 10
2 : 5 1 : 5.

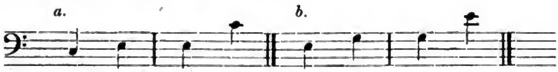
§ 14.

Nun giebt es noch eine andere Art der Octavenversetzung; dieselbe kann nämlich auch dadurch geschehn, dass der höhere Ton des ursprünglichen Intervalles zum tieferen und umgekehrt der tiefere zum höheren wird, z. B. bei der Quinte *c*—*g* (2 : 3), wenn wir das *c* um eine Octave höher setzen; wir erhalten dann die Quarte *g*—*c'* (3 : 4):



2 : 3, Quinte. 3 : 4, Quarte.

Hier ist, wie wir sehen, der höhere Ton der Quinte *g* auf seinem Platz geblieben, der ursprünglich tiefere Ton *c* aber ist durch die Octavenversetzung der höhere von beiden geworden. Hierdurch wird das Intervall selbst geändert; in vorliegendem Falle ist also aus einer Quinte ($c-g$) eine Quarte ($g-c'$) entstanden. Diese Art der Octavenversetzung nennt man die Umkehrung eines Intervalles. Dieselbe macht einen bedeutend anderen Eindruck auf unser Ohr, als das blosse Auseinanderrücken der Intervallen-Töne. Aber auch die Umkehrung ändert nichts an der consonirenden oder dissonirenden Eigenschaft eines Intervalles, da ja durch die Octavenversetzung die Töne selbst nicht wesentlich geändert werden, sondern dieselben, wie ich es vorhin bildlich ausdrückte, nur in einem anderen Maassstabe erscheinen. Es ist selbstverständlich, dass sich alle Intervalle in der angegebenen Weise umkehren lassen. Die Umkehrung der grossen Terz giebt die kleine Sexte (s. das Beispiel *a*), und die Umkehrung der kleinen Terz die grosse Sexte (s. das Beispiel *b*).



4 : 5, Grosse Terz. — 5 : 8, kleine Sexte. — 5 : 6, Kleine Terz, — 3 : 5. grosse Sexte.

§ 15.

Alle bis jetzt genannten Intervalle bilden die Consonanzen in der Musik, es sind folgende:

1. der Einklang . . . . 1 : 1,
2. die Octave . . . . 1 : 2,
3. die Quinte . . . . 2 : 3,
4. die Quarte, d. i. die Umkehrung der Quinte . . . . 3 : 4,
5. die grosse Terz . . . . 4 : 5,
6. die kleine Terz . . . . 5 : 6,
7. die kleine Sexte, d. i. die Umkehrung der grossen Terz 5 : 8,
8. die grosse Sexte, d. i. die Umkehrung der kleinen Terz 3 : 5.

§ 16.

Aus dem bis jetzt Auseinandergesetzten lässt sich folgender Satz ziehen: Ein Intervall bleibt dem Wesen nach Consonanz oder Dissonanz, wenn man die Töne desselben umkehrt, oder auch, wenn man einen

oder beide seiner Töne um eine oder mehrere Octaven transponirt. Und hieraus geht hervor, dass eine jede Zahl in ihrer musikalischen, harmonischen oder akustischen Bedeutung gleich ist ihren Vervielfältigungen mit oder Theilungen durch 2, also:

$$1 = 2 = 4 = 8 \text{ etc.}$$
$$3 = 6 = 12 = 24 \text{ etc.}$$
$$5 = 10 = 20 = 40 \text{ etc.}$$

und es sind somit alle Intervalle, deren Verhältnisszahlen aus den Zahlen 1, 3 und 5 und deren Verdopplungen bestehen Consonanzen.

§ 17.

Hier ist noch hinzuzufügen, was sich eigentlich von selbst versteht: Wenn, wie gesagt, die Octave dem Wesen nach nichts weiter als die Wiederholung eines Tones ist, so geht daraus hervor, dass die Octave auch die Gränze aller Intervalle bildet und dass, wenn wir durch irgend welche Combination ein Intervall erhalten haben, welches grösser als die Octave ist, dieses Intervall dasselbe bleibt, wenn wir eine Octave von ihm abziehen; und dass wir demgemäss jedes grössere Intervall durch Multiplication seiner tieferen Schwingungszahl mit 2 oder durch Division seiner höheren durch 2 auf sein eigentliches Verhältniss reduciren können. Haben wir z. B. die grosse Decime 2 : 5, so ist sie dem Wesen nach 4 : 5, d. i. grosse Terz. Haben wir die Duodecime 1 : 3, so ist sie dem Wesen nach 2 : 3, d. i. Quinte; haben wir die kleine Decime 5 : 12, so ist sie dem Wesen nach 5 : 6, d. i. kleine Terz u. s. f. Nur die Octave selbst 1 : 2 wird als Gränze der Intervalle gewöhnlich als wirkliches Intervall betrachtet und auch in der praktischen Musik nur in seltenen Fällen als Einklang (1 : 2 = 1 : 1) angesehen.

§ 18.

Von Verbindungen von mehr als zwei Tönen kann nur eine Verbindung von dreien lauter unter sich consonirende Intervalle enthalten, nämlich wenn man einem Tone seine Quinte und Terz hinzufügt. Die Terz kann entweder gross oder klein sein und wir erhalten in dem einen Falle:

$$c - e - g,$$
$$1 : \tfrac{5}{4} : \tfrac{3}{2},$$
$$4 : 5 : 6,$$

und in dem anderen:

$$c - es - g,$$
$$1 : \tfrac{6}{5} : \tfrac{3}{2},$$
$$10 : 12 : 15,$$

und es consoniren nach dem oben Erörterten auch alle Umkehrungen und Octavenversetzungen, und natürlich auch alle Octavenversetzungen aller Umkehrungen dieser aus drei verschiedenen Tönen bestehenden Tonverbindung *).

§ 19.

Hier bei dieser Verbindung von drei Tönen ist nun ebenfalls ein Unterschied zu machen zwischen Versetzungen und Umkehrungen. Ein Dreiklang lässt nämlich zwei Umkehrungen zu, bei welchen es allein auf die Stellung des Basstones ankommt. Die erste Umkehrung erhalten wir, wenn wir die ursprüngliche Terz als tiefsten Ton des Zusammenklanges annehmen:

e — g — c und *es — g — c*.

Diese nennen wir Sexten-Accord. — Die zweite Umkehrung erhalten wir, wenn wir die ursprüngliche Quinte in den Bass legen:

g — c — e und *g — c — es*,

dann haben wir den Quart-Sexten-Accord. Lassen wir dagegen den ursprünglichen Grundton an seiner Stelle und ändern nur die Lage der beiden oberen Töne, so erhalten wir eine Versetzung des Accordes:

u. s. w.

und es versteht sich von selbst, dass auch jede von den beiden Umkehrungen eine grosse Menge solcher Versetzungen zulässt.

§ 20.

Der Name Dreiklang als terminus technicus wird aber nur für den Grundaccord und seine Versetzungen gebraucht, jedoch nicht für seine

---

*) Wir machen, um Missverständnisse zu vermeiden, darauf aufmerksam, dass in Bezug auf die Quarte Theorie und Praxis aus einander gehen, indem die letztere die Quarte in gewissen Fällen zu den unvollkommenen Consonanzen, bisweilen sogar zu den Dissonanzen rechnet. Vgl. meinen Contrapunkt (Berlin, 1862) pag. 60. In gegenwärtiger rein theoretischer Abhandlung zählen wir die Quarte jedoch als Umkehrung der Quinte 2 : 3 zu den vollkommenen Consonanzen.

Umkehrungen, den Sexten- und Quart-Sexten-Accord. Unter **Dreiklang** hat man sich daher nur die Verbindung eines tiefsten Tones mit seiner Quinte und Terz vorzustellen.

Dieser **Dreiklang** hat vom Grundton aus gerechnet, wie schon gesagt, entweder die grosse Terz:

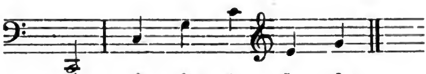
c — *e* — *g*,
4 : 5 : 6,

und heisst dann **Dur-Dreiklang**; oder er hat die kleine Terz:

c — *es* — *g*,
10 : 12 : 15,

und heisst dann **Moll-Dreiklang**.

Von diesen beiden Tonverbindungen ist jene mit der grossen Terz die consonirendere, wie man sofort an den viel einfacheren Zahlenverhältnissen sehen kann. Die dem Dur-Dreiklange zu Grunde liegenden Zahlenverhältnisse 4 : 5 : 6 sind so einfacher Art, dass sie jedes Ohr mit Leichtigkeit fassen kann, auch wird dieser Dreiklang von der Natur selbst hervorgebracht. Wenn man nämlich eine Saite von gehöriger Länge anschlägt (denken wir uns eine solche, die Contra-*C* angiebt), so hört man ausser dem eigentlichen Ton derselben zunächst ihre höhere Octave mitklingen, über dieser die Quinte der Octave, dann die Octave der Octave, und über der letzteren die grosse Terz, so dass neben dem eigentlichen Tone der Saite folgende mitklingende Töne zu hören sind:



1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6

Die halbe Note zeigt den Ton der ganzen Saitenlänge an; die Viertelnoten dagegen die mitklingenden Töne und die Zahlen die Schwingungsverhältnisse derselben zur ganzen Saite; wie die mitklingenden Töne entstehen, wird sich in den folgenden §§ zeigen.

§ 21.

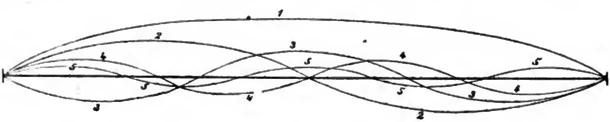
Ueber die eigenthümliche Erscheinung der mitklingenden Töne ist zu bemerken: Bei gleicher Spannung steht die Länge einer Saite zu den Schwingungszahlen in umgekehrtem Verhältniss, d. h., wenn wir annehmen, dass eine Saite, deren Länge wir 1 nennen wollen, in einer Zeitein-

heit eine Schwingung macht, so macht die halbe Saite in derselben Zeit zwei Schwingungen und giebt also die Octave an. Der dritte Theil der Saite macht drei Schwingungen und erzeugt die Quinte der Octave. Der vierte Theil macht vier Schwingungen, die Octave der Octave; der fünfte Theil macht fünf Schwingungen, die Terz über der Doppel-Octave.

Und dem entsprechend: Wenn eine Saite um den dritten Theil verkürzt wird, so erhält man einen Ton der drei Schwingungen macht, während die ganze Länge zweimal schwingt, also die Quinte 2 : 3; wenn man die Saite um den vierten Theil ihrer Länge verkürzt, so erhält man einen Ton der vier Schwingungen macht, während die ganze Länge dreimal schwingt, also die Quarte 3 : 4; wenn man die Saite um den fünften Theil verkürzt, so erhält man einen Ton der fünfmal schwingt, während die ganze Länge viermal schwingt, also die grosse Terz 4 : 5, u. s. w.

§ 22.

Wenn nun eine Saite von gehöriger Länge angeschlagen wird, so schwingt erstens ihre ganze Länge und erklingt in dem ihr eigenen Ton. Nebenbei, wenn auch weniger stark, schwingen ihre beiden Hälften jede für sich, wodurch das Mitklingen ihrer Octave entsteht. Ebenso schwingen ihre drei Drittel jedes für sich und erzeugen die Quinte der Octave; ebenso ihre vier Viertel, ihre fünf Fünftel, ihre sechs Sechstel u. s. w.



Auf diese Weise kommt es, dass man neben dem eigentlichen Tone die vorhin angegebenen Intervalle leise mitklingen hört. Die Saite aber theilt sich noch weiter, es erklingen auch ihre sechs Sechstel, ihre sieben Siebentel, ihre acht Achtel, ihre neun Neuntel, ihre zehn Zehntel und so ins Unendliche fort. Je kleiner indess die Theile sind, desto unvernehmbarer sind sie für unser Ohr, obwohl man ein Siebentheil, welches aber nicht ein musikalisches Intervall ist, oft noch sehr deutlich hören kann. Ueber dieses unmusikalische Siebentheil werde ich weiter unten (§ 34) einiges sagen. Man nennt die mitklingenden Töne einer Saite die akustische oder harmonische Reihe.

§ 23.

Dieselbe wird aber nicht allein durch das Anschlagen einer Saite hervorgebracht, sondern klingt auch auf Blaseinstrumenten, ja selbst in der menschlichen Stimme mit. Hier theilt sich keine Saitenlänge, sondern die in Schwingung gesetzte Luftsäule. Die Hervorbringung der Töne auf einigen Blaseinstrumenten, nämlich den Blechinstrumenten, wie z. B. Hörnern und Trompeten, beruht allein darauf, dass der Spieler im Stande ist, durch die Art und Weise des Anblasens, die ganze Luftsäule des Instrumentes in Bewegung zu setzen, oder die beiden Hälften, oder die drei Drittel, oder die vier Viertel, oder die fünf Fünftel, oder die sechs Sechstel, oder die sieben Siebentel, oder die acht Achtel, oder die neun Neuntel, oder die zehn Zehntel, oder die elf Elftel, oder die zwölf Zwölftel und noch einige kleinere Theile, von denen aber nicht alle, nämlich nicht die Siebentel und die Elftel, auch viele der noch höheren nicht, genau den musikalischen Verhältnissen der diatonischen Tonleiter entsprechen, so dass ein gewandter Bläser hin und wieder durch künstliche Mittel, sogenanntes Stopfen d. i. Verlängern oder Verkürzen des Rohres, nachhelfen muss, dem Intervall die richtige Intonation zu geben.

§ 24.

In früheren Zeiten hat man gewöhnlich die akustischen Verhältnisse nach Saitenlängen berechnet; man findet dies in den meisten musikalischen und physikalischen Büchern bis zu Anfang unseres Jahrhunderts und zum Theil noch später. Es steht dann dort die kleinere Zahl für den höheren Ton und die grössere für den tieferen. Wir sagen, die Quinte verhält sich wie 2 : 3, die älteren dagegen, wie 3 : 2. Da aber der Ton durch Schwingungen hervorgebracht wird, so ist die heutige Art, durch welche wir die wirklichen Verhältnisse dieser Schwingungszahlen angeben, entschieden der früheren vorzuziehen, und alle neueren Schriftsteller sind daher dem Chladni gefolgt, der in seiner Akustik (Leipzig 1802) folgendermaassen sich hierüber ausdrückt: »Die meisten »Schriftsteller berechnen die Töne nach den ihnen zukommenden Ver»hältnissen der Saitenlängen. Nun ist es zwar nicht zu tadeln, wenn »man sich des Calcüls der Saitenlänge, besonders zum Gebrauch bei »Saiteninstrumenten, bedient, oder wenn man sowohl zur Stimmung, »als auch, um sich und Anderen einen Begriff von der Wirkung eines

»Tonverhältnisses zu machen, das Monochord anwendet; es ist aber ganz »der Natur entgegen, wenn man, wie es von Verschiedenen geschehen »ist, irgend eine Eigenschaft der Saiten als Grund der ganzen Tonlehre »ansehen will, indem viele andere Arten klingender Körper, welche »doch eben so wohl, wie die Saiten, Betrachtung verdienen, sich nach »ganz anderen Naturgesetzen richten. Da nun der Vortrag der Tonlehre »für alle klingenden Körper ohne Rücksicht auf ihre besonderen Schwin- »gungsgesetze, allgemein geltend sein muss, so betrachte ich hier die »Töne nicht nach Saitenlängen, sondern nach den Verhältnissen der »Anzahl ihrer Schwingungen«.

§ 25.

Die alten griechischen Schriftsteller berechnen die Intervalle häufig nach Saitenlängen, wie z. B. Euklid in seiner *Sectio canonis.* Wenigstens eben so häufig aber setzen sie auch für den höheren Ton, wie wir es thun, die grössere Zahl. Hierbei begehen sie aber den seltsamen Irrthum, dass sie mit diesen nach der Höhe hin steigenden Zahlen nicht die Schwingungen in derselben Zeiteinheit bezeichnen, sondern die Grösse der die Saiten spannenden Gewichte. So sagt Aristides Quintilianus im Anfange des dritten Buches, die Alten hätten von zwei gleichen Saiten die eine mit einem, die andere mit zwei Gewichten gespannt und hätten gefunden, dass die letztere die Octave der ersteren angegeben hätte. Eine dritte solche Saite hätten sie mit drei solchen Gewichten gespannt und sie habe von der zweiten die Quinte und von der ersten die Duodecime (= Octave + Quinte) hören lassen, u. s. w. Und nicht weniger als sechs Schriftsteller (nämlich Nicomachus pag. 10 und 11, — Gaudentius pag. 13—15, — Jamblichus im Leben des Pythagoras, cap. 26, — Boethius *de musica,* Buch 1, cap. 10, — Censorinus *de die natali* [im dritten Jahrhundert] cap. 10, — Macrobius, *commentarius in Ciceronis somnium Scipionis* [fünftes Jahrhundert] Buch 2, cap. 1) erzählen, dass Pythagoras bei einer Schmiede vorbeigehend gehört habe, dass die Hämmer der Schmiedenden verschiedene Töne hervorgebracht hätten, was von der verschiedenen Schwere derselben hergerührt habe. Erfreut über diese Entdeckung sei er nach Hause gegangen und habe dort vier gleich lange und gleich schwere Saiten mit Gewichten von verschiedener Schwere gespannt; und hierbei habe er gefunden, dass die mit zwölf Gewichten gespannte

Saite die Octave der mit 6 Gewichten gespannten gegeben habe, und die mit 9 Gewichten gespannte die Quinte der ersteren und die mit 8 Gewichten habe die Quarte hervorgebracht:

6 Pfd. $= c$.
8 Pfd. $= f$.
9 Pfd. $= g$.
12 Pfd. $= c'$.

Hieraus ergiebt sich, dass keiner dieser vielen Berichterstatter sich die Mühe gegeben hat, das Experiment selbst zu machen, da ein auch noch so ungenauer und durch Hindernisse, wie Reibung und Ungleichheit der Saiten, gestörter Versuch den enormen Unterschied ihrer Behauptungen von der Wirklichkeit würde gezeigt haben. Die Physik lehrt nämlich, dass die Schwingungszahlen der durch Gewichte gespannten Saiten nicht mit der Schwere dieser Gewichte in einfacher Weise wachsen, sondern mit den Quadraten derselben. Wenn z. B. auf sechs Schwingungen des mit 6 Pfund gespannten Tones c zwölf Schwingungen der Octave c' kommen, so entstehen diese nicht durch die mit 2 multiplicirten 6 Pfd. des Tones c, sondern durch die mit $2^2 = 4$ multiplicirten 6 Pfd. dieses c, d. h. durch 24 Pfd. Ebenso werden die 9 Schwingungen des Tones g nicht hervorgebracht durch $1\frac{1}{2} \times 6$ Pfd., sondern durch $(1\frac{1}{2})^2$ oder $\frac{9}{4} \times 6 = 13\frac{1}{2}$ Pfd., und ebenso die 8 Schwingungen des Tones f, welches $1\frac{1}{3}$ mal die 6 Schwingungen des Tones c macht, durch $(1\frac{1}{3})^2 \times 6 = 10\frac{2}{3}$ Pfd.

$c = 6$ Pfd.
$f = 10\frac{2}{3}$ Pfd.
$g = 13\frac{1}{2}$ Pfd.
$c' = 24$ Pfd.

Bleiben wir zur Beurtheilung der Grösse des Irrthumes der Pythagoräer bei jenen von ihnen gebrauchten Zahlen, so haben sie geglaubt durch 12 Pfd. die Octave zu erreichen, während sie noch nicht einmal die Quinte erreichen konnten, welche $13\frac{1}{2}$ Pfd. braucht, ferner geben die 8 Pfd. der Quarte ein Intervall, welches noch nicht die Grösse der kleinen Terz hat.

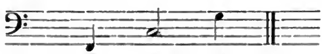
§ 26.

Wir kehren nun zur Bildung der Tonleiter zurück. Wie wir gesehen haben, ist die einfachste und von der Natur als mitklingende

Töne selbst hervorgebrachte Verbindung dreier Töne der **Dur-Dreiklang**, z. B.

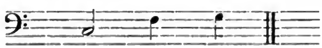
$c — e — g,$
$4 : 5 : 6.$

Die diatonische Tonleiter erhalten wir nun dadurch, dass wir drei solcher einfacher Dur-Dreiklänge combiniren und zwar in folgender Weise: Wir stellen zunächst einen Grundton fest, wobei wir bei dem Tone *c* bleiben wollen. Diesem fügen wir sowohl nach der Höhe als nach der Tiefe dasjenige Intervall hinzu, welches nach der Octave das einfachste ist, nämlich die Quinte 2 : 3, und wir wollen hierbei noch bemerken, dass die Quinte in der That diejenige einfachste Consonanz ist, welche einen neuen Ton erzeugt, indem wir die Octave nach § 13 u. ff. ja nur als eine Wiederholung desselben Tones in verjüngtem Maassstabe kennen gelernt haben. Durch Hinzufügung der beiden Quinten erhalten wir:



4 : 6 : 9

oder was dasselbe ist, da eine Octaven-Versetzung nichts wesentliches an den Tonverhältnissen ändert:

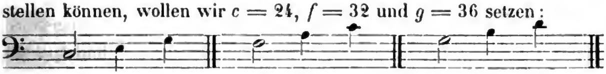


6 : 8 : 9

und nun errichten wir auf jedem dieser drei Töne einen Dur-Dreiklang im Verhältnisse 4 : 5 : 6.

§ 27.

Damit wir die hierbei entstehenden Verhältnisse ohne Brüche darstellen können, wollen wir $c = 24$, $f = 32$ und $g = 36$ setzen:



24 : 30 : 36 : 32 : 40 : 48 : 36 : 45 : 54
(4 : 5 : 6) (4 : 5 : 6) (4 : 5 : 6)

Ordnen wir diese Töne von der Tiefe nach der Höhe, wobei wir den letzten Ton $d = 54$ eine Octave tiefer transponiren, indem wir seine Schwingungszahl durch 2 dividiren ($= 27$), so erhalten wir folgende Octave:

24 : 27 : 30 : 32 : 36 : 40 : 45 : 48.

§ 28.

Diese Leiter lässt sich nun durch Octavenversetzung ins Unendliche verlängern und heisst, gleichviel welchen ihrer Töne wir als den ersten ansehen, die *diatonische Tonleiter* oder die *Tonfolge des diatonischen Klanggeschlechtes*:

G_1	A_1	H_1	C	D	E	F	G	A	H	c	d	e	f	
18 :	20 :	$22\frac{1}{2}$:	24 :	27 :	30 :	32 :	36 :	40 :	45 :	48 :	54 :	60 :	64	
$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$		u. s. w.

§ 29.

Wie man sieht, ist diese Tonreihe aus dreierlei Intervallen zusammengesetzt, nämlich 8 : 9, 9 : 10 und 15 : 16. Die beiden ersten Verhältnisse 8 : 9 und 9 : 10, welche nur wenig von einander verschieden sind, nämlich um das kleine Verhältniss 80 : 81, nennen wir ganze Töne, und zwar das erste 8 : 9 *grossen ganzen Ton*, das andere 9 : 10 *kleinen ganzen Ton*. Das dritte bedeutend kleinere Intervall 15 : 16 heisst *halber Ton*. Und jenes kleine Intervall, welches nicht selbst in der Tonleiter vorkommt, sondern nur die Differenz zwischen dem grossen und kleinen Ganzton ausmacht, 80 : 81, wird das *syntonische Komma* genannt.

§ 30.

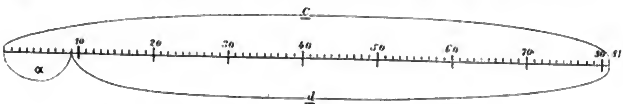
Anmerkung. Ueber dieses Komma und die anderen kleineren Intervalle, welche aus den Berechnungen und Vergleichungen der akustischen Verhältnisse hervorgehen, kann erst weiter unten ausführlicher gesprochen werden. Ueber das syntonische Komma sei indessen noch bemerkt, dass man in manchen Lehrbüchern, (die nur die ungefähre Grösse der Intervalle angeben,) nicht selten die Behauptung findet, neun syntonische Kommata machen einen grossen ganzen Ton und acht einen kleinen ganzen Ton aus. Dies ist jedoch nicht richtig, die wirklichen Zahlenverhältnisse in Decimalbrüchen sind folgende:

Der grosse ganze Ton (8 : 9)	=	1,125,
neun syntonische Kommata	=	1,118313,
der kleine ganze Ton (9 : 10)	=	1,111111,
acht syntonische Kommata	=	1,104488.

Das syntonische Komma ist also etwas kleiner als der neunte Theil des grossen ganzen Tones.

§ 31.

Jene § 30 angeführte und viel verbreitete Ansicht aber, dass nämlich der grosse ganze Ton genau 9 und der kleine genau 8 syntonische Kommata betrage, hat in folgendem ihren Ursprung: Wenn man das syntonische Komma auf dem Monochorde darstellen will, so muss man die Saitenlänge desselben in 81 gleiche Theile theilen; nach Abzug eines 81tels ertönt dann die Saite um ein Komma höher als ihre ganze Länge. Benutzt man nun diese Theilung in 81 Theilchen zur Herstellung weiterer Verhältnisse, so erhält man am Ende des neunten Theiles den grossen ganzen Ton, denn 81 : 72 = 9 : 8. Wir haben hier die grössere Zahl vorausgesetzt, da wir die Verhältnisse in Saitenlängen vor uns haben. Die Theilung des Monochordes ist demgemäss wie die Figur zeigt. Die ganze Länge giebt uns den Ton *c* an und die um $\frac{9}{81}$ verkürzte den Ton *d*:



Wir sehen hier bei *α* die Differenz zwischen *c* und *d* in neun gleiche Theile getheilt, welche aber natürlicherweise nicht neun gleiche Intervalle im Verhältniss 80 : 81 geben können, sondern von verschiedener Grösse in folgender Progression sind. Durch das erste Theilchen erhalten wir das Verhältniss 81 : 80, durch das zweite 80 : 79, durch das dritte 79 : 78 u. s. f. bis 73 : 72, folgende Reihe bildend:

$$81 : 80 : 79 : 78 : 77 : 76 : 75 : 74 : 73 : 72,$$

oder nach den Schwingungszahlen geordnet:

$$\underbrace{72 : 73 : 74 : 75 : 76 : 77 : 78 : 79 : 80 : 81}_{72 : 81 = 8 : 9 \text{ der grosse ganze Ton.}}$$

Jene oben angeführte Ansicht ist also aus einer falschen Auffassung der Verhältnisse des Monochordes hervorgegangen und die neun Kommata des grossen ganzen Tones sind nicht neun syntonische von gleicher Grösse, sondern neun andere kleine Intervallchen, von denen nur das erste und kleinste in dem Verhältniss 80 : 81 steht.

Will man den kleinen ganzen Ton auf dem Monochorde darstellen, so muss man die Länge desselben in 80 Theile theilen und von diesen 8 Theile abziehen, denn:

$$80 : 72 = 10 : 9,$$

oder man zieht bei der zuerst gegebenen Theilung in 81 Theile vorweg $\frac{1}{81}$ ab. Die acht Kommata des kleinen ganzen Tones verhalten sich dann:

$$\underbrace{72 : 73 : 74 : 75 : 76 : 77 : 78 : 79 : 80}$$

$$72 : 80 = 9 : 10, \text{ der kleine ganze Ton,}$$

von denselben hat also kein einziges die Grösse des syntonischen Komma.

§ 32.

Wir haben § 27 gesehen, dass die diatonische Tonleiter aus einer Combination von drei Dur-Dreiklängen entstanden ist, deren Grundtöne in dem einfachen Verhältniss 2 : 3 zu einander stehen. Wir sehen daher alle in einem Dur-Dreiklange und seinen Umkehrungen enthaltenen Intervalle als die von der Natur selbst gegebenen an. Es sind dies die Verhältnisse, welche sich aus der Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, 5, 6 oder besser eigentlich aus den drei Zahlen 1, 3 und 5 und ihren Vervielfältigungen mit 2 herstellen lassen. Dieselben sind bereits § 15 aufgezählt; sie bilden sämmtlich die Consonanzen in der Musik. — Erst durch die Verbindung jener verschiedenen drei Dreiklänge entstehen dann mittelbar die Dissonanzen, nämlich folgende Intervalle:

Der grosse ganze Ton	8 : 9 = 1,125 *),
der kleine ganze Ton	9 : 10 = 1,111111..,
der halbe Ton	15 : 16 = 1,066666...,
die kleine Septime, welche die Umkehrung des grossen ganzen Tones ist	9 : 16 = 1,777777...,
die kleine Septime, welche die Umkehrung des kleinen ganzen Tones ist	5 : 9 = 1,8,
die grosse Septime	8 : 15 = 1,875,
der Tritonus	32 : 45 = 1,40625,
die falsche oder verminderte Quinte. . .	45 : 64 = 1,422222....

§ 33.

Hiernach ist die Scheidung zwischen Consonanzen und Dissonanzen durchaus keine willkührliche Annahme, sondern es ist dieselbe in der

*) In dem Folgenden werde ich die Verhältnisszahlen der Intervalle zugleich in Decimalbrüchen geben, da sie sich auf diese Weise leichter in Bezug auf ihre Grösse vergleichen lassen. Hierbei wird stets angenommen, dass der tiefere Ton eines Intervalles eine Schwingung, der höhere dagegen in derselben Zeit diejenige Anzahl von Schwingungen macht, welche im Decimalbruch angegeben ist, z. B. 1,25 = 1 : 1,25 = 1 : $\frac{5}{4}$ = 4 : 5 die grosse Terz, u. s. w.

Natur der Sache tief begründet. Wenn es nun auch feststeht, dass ein Unterschied in der Vollkommenheit der Consonanzen stattfindet, d. h., dass die Octave 1 : 2 mehr übereinstimmt als die Quinte 2 : 3, diese mehr als die Quarte 3 : 4, diese wieder mehr als die grosse Terz 4 : 5 u. s. f., so giebt es dennoch keinen allmählichen Uebergang von der Classe der Consonanzen zu jener der Dissonanzen, wie von manchen unklaren Theoretikern behauptet worden ist. Denn diejenige Zahl, welche jenen Uebergang vermitteln würde, ist die Zahl 7; diese fehlt jedoch in der Reihe der musikalischen Intervalle, worüber wir uns weiter unten (§ 34) aussprechen werden. Es ist daher die Grenze zwischen den Consonanzen und Dissonanzen durchaus unverrückbar, so dass man nichts an dieser Eintheilung ändern kann, indem man etwa die complicirteren Consonanzen schon zu den Dissonanzen und die einfacheren Dissonanzen noch zu den Consonanzen zählt. Solcher Ansicht ist z. B. A. B. Marx, der sich in seiner Schrift »Die alte Musiklehre im Streit mit unsrer Zeit«, Leipzig 1841, pag. 77—84 über diesen Gegenstand folgendermaassen ausspricht: »Die Unterscheidung von Consonanzen und »Dissonanzen ist eine ganz willkührliche. Die Verhältnissreihe

1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 u. s. w.

»ist eine stetige Progression, in der jeder Schritt zu einem complicirteren »oder schwereren Verhältniss führt. 2 : 3 ist ein weniger einfaches »Verhältniss als 1 : 2; 6 : 7 weniger einfach als 5 : 6. Aber jeder »Fortschritt ist ganz gleichmässig und es ist in ihm durchaus kein Grund »vorhanden, dass das Schwierigere oder weniger Einfache eben bei »diesem und nicht bei jenem Punkt angehe. Daher ist auch in der »That oft über die Grenze des Consonirens gestritten worden und man »hat mit noch feineren Abstufungen nachhelfen, die Consonanzen so»wohl als die Dissonanzen in vollkommene und unvollkommene theilen »wollen, was denn eben so wenig genügen konnte, da jedes einzelne »Intervall ein weiter entlegenes besonderes Verhältniss ist«.

§ 34.

Durch die Entstehungsart der diatonischen Tonleiter ist aber (wie im vorigen § angegeben) die Zahl 7 gänzlich von den musikalischen Verhältnissen ausgeschlossen, obgleich beim Anschlagen einer längeren Saite nicht selten ein Siebentheil stark und wohltönend mitklingt und

auch auf Blaseinstrumenten (z. B. auf dem Waldhorn) dieses Verhältniss leicht und kräftig anspricht. Auf einer rein gestimmten Aeolsharfe ist dieser Ton, wenn der Wind darüber streicht, oft von einer höchst eigenthümlich schönen Wirkung, namentlich wenn man darüber noch das Neuntel der Saite hören kann. Wir hören dann, wenn alle Saiten in Contra-*C* gestimmt sind, ungefähr folgendes:

eine Art Septimen- und Septimen-Nonen-Accord, von ungemein weichem Klange, weil das Siebentheil, welches hier durch die Note *b* dargestellt ist, bedeutend tiefer und zugleich consonirender klingt als die diatonische Septime d. i. die Umkehrung des grossen ganzen Tones. Die Septime verhält sich wie 9 : 16, das Siebentheil wie 1 : 7 = 4 : 7, die Differenz beider beträgt 63 : 64, das ist etwas mehr als ein syntonisches Komma.

Da das Intervall des Siebentheiles in der That auf das Ohr einen angenehmen Eindruck macht, so haben sich einige Musiktheoretiker des vorigen Jahrhunderts zu dem Versuche verleiten lassen, dasselbe in die praktische Musik einzuführen. Kirnberger richtete zuerst seine Aufmerksamkeit auf diesen Ton und gab ihm den neunten Buchstaben des Alphabetes *i* zum Namen. Er spricht sich hierüber aus in seinem Lehrbuch »Die Kunst des reinen Satzes in der Musik«, Berlin und Königsberg 1774, Theil I, pag. 24 und 25. Sein Freund Karl Fasch, der berühmte Gründer der Berliner Singakademie benutzte diese Entdeckung und will sogar eine Stelle in seinem 119. Psalm als *i* intonirt wissen (nämlich in No. 9 des genannten Werkes Takt 2 u. weiter unten noch einmal). Es heisst dort: »Dein Wort ist meinem Munde süsser denn Honig« und er hoffte hierdurch die Quintessenz aller Süssigkeit ausdrücken zu können. Ernst Ludw. Gerber erzählt (Neues historisch-biographisches Lexicon, Band II, pag. 86) dass ihm Fasch selbst die genannte Stelle als einen Versuch der Anwendung des Tones *i* bezeichnet und eigenhändig abgeschrieben habe. Die Stelle ist auch dort abgedruckt. Es ist ein einfacher Septimen-Accord (Fasch schreibt *ais* statt *b*)

der sich folgendermaassen auflöst. Ich gebe nur die zu Grunde liegenden Accorde:

Diese Versuche stehen natürlich ganz vereinzelt da; eine richtige Erkenntniss der diatonischen Tonleiter und ihrer Intervalle hätte Beide (sowohl den KIRNBERGER als den FASCH) leicht davon überzeugen können, dass der Ton *i* ausser allem Zusammenhange mit den übrigen Tönen der Tonleiter steht, und folglich seine Anwendung in der praktischen Musik unmöglich ist. Denn aus dem blossen Wohlklang kann man die Zulässigkeit eines Intervalles nicht beweisen. Die Musik wird nur durch solche Töne hervorgebracht, die durch ihre Zahlenverhältnisse in einem geregelten harmonischen inneren Zusammenhange stehen.

§ 35.

Wir kehren nun zur Betrachtung der diatonischen Tonleiter und zu ihren Verhältnisszahlen, wie sie § 27 und 28 angegeben sind, zurück. Hierbei werden wir sogleich sehen, dass in dieser Leiter gewisse Mängel und Unreinheiten einzelner Intervalle vorhanden sind, welche in der Natur der Zahlenverhältnisse ihren Grund haben und welche der Art sind, dass es nicht möglich ist, selbst eine einfache Melodie, welche die Grenzen der diatonischen Leiter nicht einmal überschreitet, vollkommen rein zu singen, ohne an gewissen Stellen von den ursprünglichen hier angegebenen Zahlenverhältnissen ein wenig abzuweichen. Um dies zu erkennen ist es nöthig, dass wir alle in der Tonleiter vorkommenden Consonanzen einzeln durchgehen und prüfen. Es sind dies die § 15 aufgezählten Intervalle. Wir müssen untersuchen, ob dieselben, so oft sie in der Tonleiter vorkommen, in jedem einzelnen Falle die dort angegebenen Schwingungszahlen haben.

§ 36.

1. Die Octaven sind selbstverständlich alle rein und stehen in dem richtigen Verhältniss 1 : 2 ($c-c' = 24 : 48$, $d-d' = 27 : 54$, $e-e' = 30 : 60$ u. s. w.). Sie umfasst zwei halbe und fünf ganze Töne, von welchen letzteren drei grosse und zwei kleine ganze Töne sind.

§ 37.

2. Die Quinte umfasst drei Ganztöne und einen halben Ton; von den ganzen Tönen müssen, wenn das Intervall sich wie 2 : 3 verhalten soll, zwei grosse ganze Töne und nur einer ein kleiner ganzer Ton sein, denn $\frac{9}{8} \times \frac{9}{8} \times \frac{10}{9} \times \frac{16}{15} = \frac{3}{2}$. Von den sechs in der diatonischen Tonleiter vorkommenden Quinten stehen fünf in diesem richtigen Verhältniss, nämlich:

c — d -×- ef — g
ef — g -×- a — h
f — g -×- a — hc
g -×- a — hc — d
a — hc — d -×- e,

wo wir durch den Strich mit dem Kreuzchen -×- den kleinen ganzen Ton und durch den blossen Strich — den grossen ganzen Ton angedeutet haben. Diesem Verhältniss entspricht dagegen die Quinte *d-× ef—g-×-a* nicht, welche zwei kleine ganze Töne in ihrem Umfange hat und sich wie 27 : 40 verhält, also um ein syntonisches Komma 80 : 81 zu klein ist. Der Klang einer solchen um ein syntonisches Komma zu kleinen Quinte ist aber von so unreiner, unharmonischer Wirkung, dass wir sie selbst als melodischen Schritt in einem einstimmigen Gesange nicht dulden würden, geschweige denn als Symphonie oder Zusammenklang in der mehrstimmigen Musik. Ein Sänger würde daher nicht im Stande sein, folgendes Sätzchen

9 : 10

24 : 36 : 40 : 27

genau den ursprünglichen diatonischen Zahlenverhältnissen gemäss auszuführen. Da diese Zahlenverhältnisse indess aus einer schon ziemlich complicirten Combination entstanden sind, so kann sich der Singende keine genaue Rechenschaft darüber geben, und er wird stets mit der Vorstellung singen, als seien die Quinten *c—g* und *d—a* beide von ganz gleicher Grösse; er wird daher das Verhältniss 27 : 40 in 2 : 3 verwandeln, wird also entweder *a* höher oder *d* tiefer intoniren. Und auch die Theoretiker und Praktiker haben zu allen Zeiten *d—a* wie die anderen fünf Quinten durchaus als eine vollkommen reine Quinte und eine vollkommene Consonanz behandelt.

§ 38.

3. Die Quarte ist die Umkehrung der Quinte; dieselbe umfasst, wenn sie das reine Verhältniss 3 : 4 haben soll, einen halben Ton und zwei Ganztöne, von denen der eine gross, der andere klein ist, $\frac{9}{8} \times \frac{10}{9} \times \frac{16}{15} = \frac{4}{3}$. Von dieser Art giebt es fünf, nämlich:

c — *d* -×- *ef*
d -×- *ef* — *g*
ef — *g* -×- *a*
g -×- *a* — *hc*
hc — *d* -×- *e*.

Nun ist noch die Umkehrung der Quinte *d* — *a*, die Quarte *a* — *d* übrig; diese besteht aus zwei grossen ganzen Tönen und einem halben Ton; sie ist also um so viel zu gross, wie die Quinte *d* — *a* zu klein ist, nämlich um ein syntonisches Komma, $\frac{9}{8} \times \frac{9}{8} \times \frac{16}{15} = \frac{27}{20}$.

§ 39.

4. Die grossen Terzen, deren es drei in der diatonischen Leiter giebt (*c*—*e*, *f*—*a*, *g*—*h*), stehen selbstverständlich in dem richtigen Verhältniss 4 : 5, da ja die Tonleiter aus den drei harten Dreiklängen auf *c*, *f* und *g* zusammengesetzt ist, und das Intervall sonst nicht weiter vorkommt. Sie besteht aus einem grossen und einem kleinen ganzen Tone, *c* — *d* -×- *e*, *f* — *g* -×- *a*, *g* -×- *a* — *h*.

§ 40.

5. Die kleinen Terzen sollen sich wie 5 : 6 verhalten und bestehen in diesem Falle aus einem grossen ganzen Ton (8 : 9) und einem halben (15 : 16); es giebt ihrer vier, von denen jedoch nur drei rein sind, nämlich:

ef — *g*, *a* — *hc* und *hc* — *d*,

dagegen ist die vierte *d* -×- *ef* um ein syntonisches Komma zu klein und verhält sich wie 27 : 32, indem sie aus einem kleinen ganzen Ton und einem halben Tone besteht, denn $\frac{10}{9} \times \frac{16}{15} = \frac{32}{27}$. Diese kleine unreine Terz ist als Consonanz allerdings unerträglich, kommt aber in einigen dissonirenden Tonverbindungen vor, vergl. §§ 45—47.

§ 41.

6. Die kleinen Sexten sind die Umkehrungen der grossen Terzen und stehen daher selbstverständlich in dem reinen Verhältniss 5 : 8. Sie bestehen aus zwei grossen ganzen Tönen, einem kleinen ganzen Ton und zwei halben Tönen, ($\frac{9}{8} \times \frac{9}{8} \times \frac{10}{9} \times \frac{16}{15} \times \frac{16}{15} = \frac{8}{5}$).

ef — g -×- a — hc

a — hc — d -×- ef

hc — d -×- ef — g.

§ 42.

7. Die grossen Sexten sind die Umkehrungen der kleinen Terzen und müssen, wenn sie rein sind, das Verhältniss 3 : 5 haben. In diesem Falle bestehen sie aus zwei grossen ganzen Tönen, zwei kleinen ganzen Tönen und einem halben Ton, ($\frac{9}{8} \times \frac{9}{8} \times \frac{10}{9} \times \frac{10}{9} \times \frac{16}{15} = \frac{5}{3}$). Es sind folgende drei:

c — d -×- ef — g -×- a

d -×- ef — g -×- a — h

g -×- a — hc — d -×- e.

Die vierte, die Umkehrung der kleinen Terz *d — f*, ist jedoch um ein syntonisches Komma zu gross,

f — g -×- a — hc — d,

indem sie aus drei grossen ganzen Tönen, einem kleinen ganzen Ton und einem halben Ton besteht und sich wie 16 : 27 verhält.

§ 43.

Zusatz. Der Vollständigkeit wegen mögen hier noch die dissonirenden Intervalle der diatonischen Leiter einen Platz finden, nämlich der halbe Ton, der ganze Ton, der Tritonus, die falsche Quinte, die kleine und die grosse Septime.

1. Der halbe Ton = 15 : 16, *e—f* und *h—c*,
2. a) Der kleine ganze Ton = 9 : 10, *d -×- e* und *g -×- a*,
   b) Der grosse ganze Ton = 8 : 9, *c—d*, *f—g*, *a—h*.
3. Der Tritonus oder die übermässige Quarte,

f — g -×- a — h;

dieselbe besteht aus zwei grossen und einem kleinen ganzen Ton $\frac{9}{8} \times \frac{9}{8} \times \frac{10}{9} = \frac{45}{32}$.

4. Die verminderte oder falsche Quinte,

h – *c* — *d* -×- *ef*;

dieselbe besteht aus zwei halben Tönen und einem grossen und einem kleinen ganzen Ton, $\frac{16}{15} \times \frac{16}{15} \times \frac{9}{8} \times \frac{10}{9} = \frac{64}{45}$.

Diese beiden Intervalle Nr. 3 und 4 sind nur sehr wenig in der Grösse verschieden, nämlich um das sogenannte Diaschisma (vergl. § 56 und 57), welches kleiner als das syntonische Komma ist.

Verminderte Quinte,	45 : 64 = 1,422222
Tritonus,	32 : 45 = 1,40625
Diaschisma	2025 : 2048 = 1,011358.

5. Die kleine Septime, welche entweder die Umkehrung des grossen ganzen Tones ist,

d -×- *ef* — *g* -×- *a* — *hc*

g -×- *a* — *hc* — *d* -×- *ef*

und in diesem Falle aus zwei grossen ganzen Tönen, zwei kleinen ganzen Tönen und zwei halben Tönen besteht, $\frac{9}{8} \times \frac{9}{8} \times \frac{10}{9} \times \frac{10}{9} \times \frac{16}{15} \times \frac{16}{15} = \frac{9}{5}$ oder, welche die Umkehrung des kleinen ganzen Tones ist,

ef — *g* -×- *a* — *hc* — *d*

a — *hc* — *d* -×- *ef* — *g*

hc — *d* -×- *ef* — *g* — *a*

und dann aus drei grossen ganzen Tönen, einem kleinen ganzen Ton und zwei halben Tönen besteht, $\frac{9}{8} \times \frac{9}{8} \times \frac{9}{8} \times \frac{10}{9} \times \frac{16}{15} \times \frac{16}{15} = \frac{16}{9}$.

6. Die grosse Septime,

c — *d* -×- *ef* — *g* -×- *a* — *h*

f — *g* -×- *a* — *hc* — *d* -×- *e*;

dieselbe besteht aus drei grossen ganzen, zwei kleinen ganzen Tönen und einem halben Ton, $\frac{9}{8} \times \frac{9}{8} \times \frac{9}{8} \times \frac{10}{9} \times \frac{10}{9} \times \frac{16}{15} = \frac{15}{8}$.

§ 44.

Bei der hier in Betracht kommenden Unreinheit eines consonirenden Intervalles handelt es sich also immer um das syntonische Komma, welches wir § 29 zuerst als die Differenz des grossen und kleinen ganzen Tones haben kennen lernen. Es tritt in unsrer nach der modernen Weise aus den drei Dur-Dreiklängen construirten Tonleiter da zu Tage, wo die Töne des Dreiklanges *f* — *a* — *c* unmittelbar mit dem Dreiklange *g* — *h* — *d* in Berührung kommen, oder genauer, wo die Töne *f* — *a* vom Dreiklange auf *f* mit dem Tone *d*, der Quinte des *G*-Dreiklanges

zusammenstossen. Dieses kleine Intervall ist Schuld daran, dass selbst eine ganz streng diatonische Musik (die reinste Diatonik herrschte bekanntlich im Mittelalter bis Ende des 16. und Anfang des 17. Jahrhunderts), dass selbst eine Composition des Palestrina nicht gesungen werden kann, ohne dass man die ursprünglichen Verhältnisse ein wenig ändert. Dies geschieht von Seite der Ausführenden beim A capella-Gesange mehr oder weniger unbewusst. Man bezeichnet solche Abweichung von den ursprünglichen Zahlenverhältnissen (oder eine solche Abänderung derselben) mit dem terminus technicus »Temperiren«.

§ 45.

Wir sagten oben (§ 40), dass die kleine Terz 27 : 32 in einzelnen mehrstimmigen Tonverbindungen nicht allein zulässig, sondern sogar dem reinen Verhältniss 5:6 vorzuziehen sei. Das ist in dem sogenannten Dominant-Septimen-Accord (z. B. $g - h - d - f$) der Fall, welcher in der modernen Musik vielfach und oft ohne Vorbereitung der Septime zur Anwendung kommt. Dieser Septimen-Accord besteht aus grosser Terz (4 : 5) reiner Quinte (2 : 3) und kleiner Septime. Dieses letzte Intervall kann man entweder als die Umkehrung von 8 : 9 = 9 : 16, oder als die Umkehrung von 9 : 10 = 5 : 9 annehmen. In ersterem Falle haben wir folgende Zahlen:

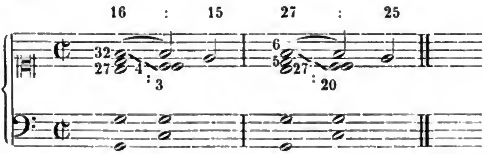
$$\begin{array}{c} 9:16 \\ (1{,}77777) \end{array}\left\{\begin{array}{lll} f=64 & & \\ & 27:32 & \\ d=54 & & 45:64 \\ & 5:6 & \\ h=45 & & \\ & 4:5 & \\ g=36 & & \end{array}\right.$$

Geben wir dagegen der Septime das Verhältniss 5 : 9, so ist allerdings der ganze Accord auf einfachere Zahlenverhältnisse zurückzuführen, wie hier zu sehen ist:

$$\begin{array}{c} 5:9 \\ (1{,}8) \end{array}\left\{\begin{array}{lll} f=36 & & \\ & 5:6 & \\ d=30 & & 25:36 \\ & 5:6 & \\ h=25 & & \\ & 4:5 & \\ g=20 & & \end{array}\right.$$

aber die Auflösung der Septime ist eine wesentlich schwierigere. — In dem ersteren Falle macht die Stimme, welche die Septime f hat, einen natürlichen diatonischen Halbtonschritt abwärts nach e = 16 : 15. In dem anderen Falle jedoch, wo wir das Verhältniss 5 : 9 haben, liegt das f um ein syntonisches Komma höher, so dass wir, um ein mit c (dem

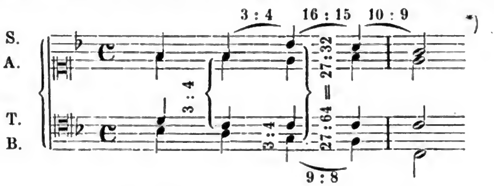
Grundton des folgenden Accordes) consonirendes *e* zu erhalten, einen übermässigen Limma-Schritt = 27 : 25 (vgl. § 53) hinabsteigen müssen. Dazu kommt ferner noch der Uebelstand, dass das *f* sich dann zu dem folgenden *c*,



dessen Tonhöhe als Quinte und Quarte von *g* unveränderlich feststeht, wie 27 : 20, anstatt wie 4 : 3 verhält.

§ 46.

Besonders nothwendig scheint die Terz 27:32 und die Septime 9:16 im Terz-Quart-Sexten-Accord zu sein, namentlich wenn er in folgender Wendung auftritt. Das Beispiel ist einer Grell'schen Motette entnommen:



*) Dass diese Verhältnisse veränderlich sind und der Dominant-Septimen-Accord auch mit der Septime 5 : 9 sehr häufig eine passende Anwendung findet, möge das folgende Beispiel zeigen:

Wir haben hier im zweiten Tacte den Accord *a — cis — e — g*, von welchem die Quinte *e* und die Septime *g* schon im vorhergehenden Tacte als Bestandtheile des *C*-Dur-Dreiklanges lagen. Nach dem Hinabsteigen der beiden Unterstimmen (Bass *c'—b—a* und Tenor *e'—d'—cis'*) müssen dieselben natürlich, wenn sie die Terz *a—cis'* singen, eine reine Quinte und eine reine kleine Terz zum *e''* des Sopranes bilden. Die bei-

Es kommt hier darauf an, dass im Sopran der Quartensprung von *f* nach *b* vollkommen rein wie 3 : 4 ausgeführt wird und ebenso der Zusammenklang der Quarte *g* — *c* zwischen Tenor und Bass, ferner die Quarte *c*—*f* zwischen Tenor und Alt, so dass also das Intervall *g*—*b′*, welches hier aus den drei Quarten *g*—*c′*, *c′*—*f′*, *f′*—*b′* zusammengesetzt erscheint, das Verhältniss von $3^3 : 4^3$ zeigen muss, dies ist aber $27 : 64 = 27 : 32$.

§ 47.

Wir wollen hier vorausnehmen, dass auch der verminderte Septimen-Accord, den man dadurch erhält, dass man im Dominantseptimen-Accord den Grundton um eine kleine Apotome *) erhöht (z. B. *g*—*h*—*d*—*f* in *gis*—*h*—*d*—*f* verwandelt), zweierlei Gestalt haben kann, nämlich:

$$\begin{matrix}57:128\\(1{,}72)\end{matrix}\left\{\begin{array}{rr} f = & 1152\\ & \\ d = & 972\\ & \\ h = & 810\\ & \\ gis = & 675\end{array}\right. \begin{array}{l} \\ 27:32 \\ \\ 5:6 \\ \\ 5:6 \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ 45:64 \\ \\ 25:36 \\ \\ \\ \end{array} \qquad \begin{matrix}125:216\\(1{,}728)\end{matrix}\left\{\begin{array}{rr} f = & 216\\ & \\ d = & 180\\ & \\ h = & 150\\ & \\ gis = & 125\end{array}\right. \begin{array}{l} \\ 5:6 \\ \\ 5:6 \\ \\ 5:6 \\ \\ \end{array}$$

aber auch hier ist bei regelrechter Auflösung des *f* in *e* die erste Gestalt mit der unreinen kleinen Terz 27 : 32 der zweiten vorzuziehen, welche aus drei gleichgrossen reinen kleinen Terzen im Verhältniss 5 : 6 besteht.

§ 48.

Bei der praktischen Ausführung der Musik wird der Sänger nicht immer mit vollem Bewusstsein grosse und kleine ganze Töne abmessen können; er wird meistentheils die Vorstellung haben, dass sie beide gleich gross seien. Beim halben Ton wird er dagegen niemals ausser Acht lassen dürfen, dass derselbe nicht unerheblich grösser als die Hälfte des ganzen Tones ist. Um rein zu singen, muss das Hauptbestreben des Sängers darauf gerichtet sein, dass er die vollkommenen Consonanzen, also die Quinten und Quarten auch vollkommen rein intonirt, d. h. nicht nur als Melodienschritte in seiner Stimme, sondern auch in Rücksicht auf die anderen Stimmen, wenn diese Intervalle im mehrstimmigen Gesange als Symphonien erscheinen, und hierbei wird er die Quinte *d* — *a*

---

den liegenden Töne im Sopran und Alt *g′*—*e″* bilden aber unter sich eine reine grosse Sexte und stehen in dem Verhältniss 3 : 5; folglich muss die Septime *a*—*g′* hier das Verhältniss 5 : 9 haben.

*) Vergl. weiter unten § 52.

genau so wie jede andere, *g—c*, *e—h* u. s. w., zu behandeln haben. Für die Praxis existirt also das unreine Verhältniss 27 : 40 nicht. Es stehen nämlich beim Gesange die Stufen der Tonleiter nicht absolut fest, wie man sich dies leicht (durch die Claviatur unserer Instrumente verleitet) falsch vorzustellen pflegt. Um die Reinheit herzustellen wird es daher sehr oft vorkommen, dass wir an gewissen Stellen, wo nach der obigen Berechnung der Tonleiter § 27 und 28 ein grosser ganzer Ton steht, einen kleinen singen müssen und umgekehrt. So kann der Gang der Harmonien z. B. Ursache sein, dass wir die Terz *c—d—e* in gewissen Fällen in der zuerst angegebenen Weise so eintheilen:

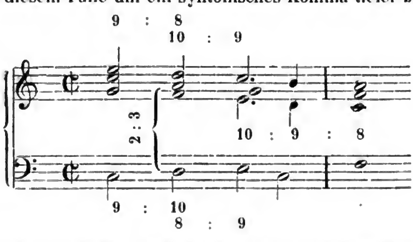
c — *d* -×- *e*,
8 : 9 : 10,

in anderen dagegen umgekehrt so:

c -×- *d* — *e*,
9 : 10
8 : 9.

Zu beiden Eintheilungen gebe ich hier ein Beispiel:

Hier stehen *g — d* in dem reinen Verhältniss 2 : 3; soll aber in dem folgenden Beispiel die Quinte *d — a* in demselben Verhältniss stehen, so ist das *d* in diesem Falle um ein syntonisches Komma tiefer zu nehmen:



dagegen wird die vorletzte Note im Tenor *d* wieder höher zu intoniren sein, damit dieselbe zu dem *h* des Sopran eine reine grosse Sexte, 3 : 5, bildet, u. s. w.

Für die praktische Musik, den Gesang und die Compositionslehre existirt also jenes falsche Verhältniss 27 : 40 nicht, sondern alle Quinten, die aus drei ganzen Tönen und einem halben Ton bestehen, gelten als vollkommen reine Intervalle. Ehe wir in der Betrachtung der akustischen Zahlenverhältnisse fortfahren, gebe ich hier ein Verzeichniss sämmtlicher in der diatonischen Tonleiter vorkommender Intervalle.

§ 49.

In der diatonischen Tonleiter giebt es mit Einschluss des Einklanges und der Octave vierzehn verschiedene Intervalle, welche zum Theil in verschiedene Gattungen zerfallen, jenachdem die Lage der halben und ganzen Töne in ihnen verschieden ist. Diese Intervalle sind nach ihrer Grösse geordnet folgende:

a) Der Einklang (*unisonus*),

b) Der Halbton (*semitonium majus*) kommt zweimal in der diatonischen Leiter vor, *ef* und *hc*.

c) Der Ton oder ganze Ton (*tonus*) kommt fünfmal vor, *d—e*, *f—g*, *g—a*, *a—h*, *c—d*.

d) Die kleine Terz (*semiditonus*) besteht aus einem ganzen und einem halben Ton, kommt viermal vor und umfasst zwei Gattungen, jenachdem der halbe Ton am oberen oder am unteren Ende liegt:

1. Gattung, *d—ef*, *a—hc*.
2. Gattung, *ef—g*, *hc—d*.

e) Die grosse Terz (*ditonus*) besteht aus zwei ganzen Tönen und kommt dreimal vor. Da sie aus zwei Intervallen besteht, welche allerdings in ihren Zahlenverhältnissen verschieden, für die Praxis der Kunst aber von gleicher Grösse sind, so giebt es nur eine Gattung:

c—d—e, *f—g—a*, *g—a—h*.

f) Die reine Quarte (*diatessaron*) besteht aus zwei ganzen Tönen und einem halben Ton und kommt sechsmal vor. Sie umfasst drei Gattungen; in der ersten liegt der halbe Ton in der Mitte, in der zweiten am unteren und in der dritten am oberen Ende:

1. Gattung, *d—ef—g*, *a—hc—d*,
2. Gattung, *ef—g—a*, *hc—d—e*,
3. Gattung, *g—a—hc*, *c—d—ef*.

g) Die übermässige Quarte oder das Dreitonintervall (*tritonus*) besteht aus drei ganzen Tönen und kommt nur einmal vor:

f—g—a—h.

h) Die verminderte oder falsche Quinte (*semidiapente*) besteht aus zwei ganzen und zwei halben Tönen und kommt ebenfalls nur einmal vor:

hc—d—ef.

i) Die reine Quinte (*diapente*) besteht aus drei ganzen Tönen und einem halben Ton, und kommt sechsmal vor. Sie hat vier verschiedene Gattungen, von denen die erste und vierte zweimal vorkommen. In der ersten Gattung liegt der halbe Ton von der zweiten zur dritten Stufe, in der zweiten von der ersten zur zweiten, in der dritten von der vierten zur fünften und in der vierten von der dritten zur vierten Stufe:

1. Gattung	*d—ef—g—a* *a—hc—d—e*
2. Gattung	*ef—g—a—h*
3. Gattung	*f—g—a—hc*
4. Gattung	*g—a—hc—d* *c—d—ef—g.*

k) Die kleine Sexte (*semitonium cum diapente*) besteht aus drei ganzen und zwei halben Tönen und kommt dreimal vor, jedesmal von anderer Gattung:

1. *ef—g—a—hc*
2. *a—hc—d—ef*
3. *hc—d—ef—g.*

l) Die grosse Sexte (*tonus cum diapente*) besteht aus vier ganzen Tönen und einem halben Ton. Sie kommt viermal vor, drei verschiedene Gattungen bildend. In der ersten liegt der halbe Ton von der zweiten zur dritten Stufe, in der zweiten von der vierten zur fünften und in der dritten von der dritten zur vierten.

1.	*d—ef—g—a—h*
2.	*f—g—a—hc—d*
3.	*g—a—hc—d—e* *c—d—ef—g—a.*

Diese letzte oder dritte Gattung des Hexachordes ist das grösste Stück der diatonischen Tonleiter, welches in Bezug auf seine Lage der ganzen und halben Töne zweimal vorkommt. Es ist daher von besonderer Bedeutung für die Fugencomposition. Die Mittelalterlichen gaben dieser Anordnung der Tonstufen die sechs Sylben *ut, re, mi, fa, sol, la.*

m) Die kleine Septime (*semiditonus cum diapente*) besteht aus vier

ganzen und zwei halben Tönen. Sie kommt fünfmal vor, fünf verschiedene Gattungen bildend:

1. *d—ef—g—a—hc*
2. *ef—g—a—hc—d*
3. *g—a—hc—d—ef*
4. *a—hc—d—ef—g*
5. *hc—d—ef—g—a.*

n) Die grosse Septime (*ditonus cum diapente*) besteht aus fünf ganzen Tönen und einem halben Ton. Sie kommt zweimal vor. Das eine Mal liegt der halbe Ton von der dritten zur vierten, das andere Mal von der vierten zur fünften Stufe:

1. *c—d—ef—g—a—h*
2. *f—g—a—hc—d—e.*

o) Die Octave (*diapason*) geht, wie ihr Name διὰ πασῶν sagt, durch alle Stufen der Leiter, sieben Gattungen bildend:

1. *d—ef—g—a—hc—d*
2. *ef—g—a—hc—d—e*
3. *f—g—a—hc—d—ef*
4. *g—a—hc—d—ef—g*
5. *a—hc—d—ef—g—a*
6. *hc—d—ef—g—a—h*
7. *c—d—ef—g—a—hc.*

Wir sind bei Aufstellung der Gattungen der Intervalle stets vom Tone *d* als dem ersten ausgegangen in Uebereinstimmung mit den mittelalterlichen Musikern, welche die Octave *d* den ersten Kirchenton nennen. Diese Uebereinstimmung halten wir aus geschichtlichen Gründen für geboten, obgleich es heutzutage manches für sich hätte, den Ton *c* als Ausgangspunct des ganzen Tonsystems anzusehen.

§ 50.

In Bezug auf die Octavengattungen wollen wir noch hinzufügen, dass ihre Brauchbarkeit in melodischer Beziehung von ihrer Theilbarkeit durch die vollkommenen Consonanzen Quinte und Quarte abhängt. Nächst dem Grundton, der Tonica, ist die Quinte als das einfachste und am meisten consonirende Intervall das wichtigste und erhält den Na-

men **Dominante**. Tonica und Dominante theilen die Octave in Quinte und Quarte; z. B.

D — ef — g — a — hc — d
Quinte Quarte

Ef — g — a — hc — d — e,
Quinte Quarte

oder, wenn wir die Tonica in die Mitte des Umfanges stellen in plagalischer Form so:

a — hc — D — ef — g — a
Quarte Quinte

hc — d — E-f — g — a — h.
Quarte Quinte

Diejenige Octave, welche diese Theilung nicht zulässt, nämlich die Octave *H—h*,

Hc — d — ef — g — a — h,
verm. Quinte Tritonus

ist für die Melodienbildung unbrauchbar. Dies hier weiter auszuführen ist nicht nöthig, da der Gegenstand in meinem Contrapunkt (Berlin 1862) und anderweitig eingehend behandelt ist.

§ 51.

Auch diejenige mehrstimmige Musik, welche wir »streng diatonisch« nennen, wendet ausser den ursprünglichen sieben Stufen der Leiter in gewissen Fällen eine chromatische Erhöhung der Töne *c* in *cis*, *f* in *fis* und *g* in *gis*, und ferner eine Erniedrigung des Tones *h* in *b* an. Die erhöhten Stufen *cis*, *fis* und *gis* kommen dann zur Anwendung, wenn im zwei- und mehrstimmigen Satze eine Cadenz (ein Schlussfall) auf *d*, *g* und *a* gebildet werden soll; sie sind dann eine Erhöhung des sogenannten aufwärts steigenden Leitetones:

Bei Betrachtung dieser Cadenzen sehen wir, dass eine der vorhandenen Stimmen von dem Ton, auf welchem der Schluss gemacht werden soll,

einen halben Ton abwärts schreitet (und zwar nach einer erhöhten Stufe) und dann wieder nach jenem ersten Ton zurückkehrt:

d—cis—d, *g—fis—g*, *a—gis—a*.

Dieser Halbtonschritt muss die Grösse des gewöhnlichen diatonischen Halbtones *e–f* oder *h–c* haben, d. h. in dem Verhältniss 15 : 16 stehen. Dieses Verhältniss wollen wir von nun an mit dem griechischen Ausdrucke Limma bezeichnen. Die Alten nannten nämlich *λεῖμμα* den Rest, welchen die grosse Terz von der reinen Quarte abgezogen übrig lässt. Nach unsrer modernen Berechnung ist die grosse Terz 4 : 5, und die reine Quarte 3 : 4.

Die reine Quarte	3 : 4	= 1,333333..
die grosse Terz	4 : 5	= 1,25
das Limma	15 : 16	= 1,066666..

§ 52.

Ziehen wir nun dieses Limma (*λεῖμμα*) von dem ganzen Tone ab, d. h. das Halbton-Intervall *cis—d* vom ganzen Tone *c—d*, oder *g—fis* von *g—f*, oder *a—gis* von *a—g*, so erhalten wir ein Intervall welches wir Apotome nennen wollen. Die *ἀποτομή* war bei den griechischen Theoretikern der Abschnitt, den das *λεῖμμα* von einem ganzen Ton abschneidet, hier also das Intervall *c—cis*, oder *f—fis* oder *g—gis*. — Dieses Intervall, (im Gegensatz zum diatonischen Halbtone) kleiner, bisweilen auch chromatischer Halbton genannt, hat in der modernen Musik zweierlei Grösse, jenachdem man das *λεῖμμα* vom grossen oder vom kleinen ganzen Ton abzieht. In dem ersteren Falle erhalten wir die grössere Apotome, 128 : 135,

Grosser ganzer Ton	8 : 9	= 1,125
Limma	15 : 16	= 1,066666
grössere Apotome .	128 : 135	= 1,054687

in dem anderen Falle die kleinere Apotome, 24 : 25,

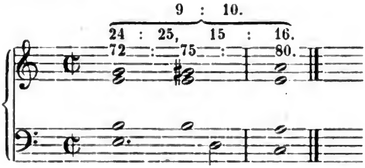
Kleiner ganzer Ton	9 : 10	= 1,111111
Limma	. 15 : 16	= 1,066666
kleinere Apotome	. 24 : 25	= 1,041667.

Dieses Intervall der kleineren Apotome ist insofern von besonderer Wichtigkeit für die Harmonie, als es den Unterschied der grossen und

kleinen Terz und somit auch den des reinen Dur- und reinen Moll-Dreiklanges angiebt, nämlich:

Grosse Terz . .	4 : 5	= 1,25
kleine Terz . .	5 : 6	= 1,2
kleinere Apotome	24 : 25	= 1,041667.

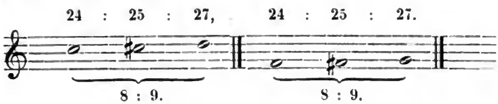
Oder hier ein vierstimmiges Beispiel in Noten, in welchem wir sehen, dass im Gange des Sopranes die kleinere Apotome und das Limma zusammen einen kleinen ganzen Ton ausmachen:



Wollten wir hier den Schritt von *g* nach *gis* als die grössere Apotome 128 : 135 auffassen, so würde dadurch die grosse Terz *e—gis* und die grosse Sexte *h—gis* um ein syntonisches Komma 80 : 81 zu gross werden.

§ 53.

Anders gestalten sich natürlich die Verhältnisse, wenn wir die kleinere Apotome zwischen zwei diatonische Tonstufen setzen, welche einen grossen ganzen Ton von einander entfernt stehen, also zwischen *c* und *d* oder zwischen *g* und *f*, z. B.



In diesem Falle erhalten wir statt des gewöhnlichen diatonischen Limma-Schrittes ein um ein syntonisches Komma zu grosses Limma, welches wir das grössere oder übermässige Limma nennen wollen:

Grosser ganzer Ton	8 : 9	= 1,125
kleinere Apotome	24 : 25	= 1,041667
grösseres oder übermässiges Limma	25 : 27	= 1,08.

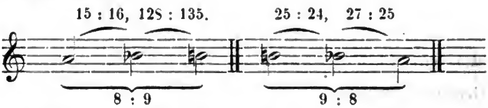
Dass dieser Schritt auch in der praktischen Musik vorkommen kann, möge das folgende dreistimmige Beispiel anschaulich machen:

Hier ist der Schritt von *cis* nach *d* in der obersten Stimme für den Sänger ganz besonders weit zu nehmen, damit das *d* zu dem in der Mittelstimme liegenden *g* eine reine Quinte bildet.

§ 54.

Das *b-rotundum*, die Erniedrigung der jetzt mit dem achten Buchstaben *h* (♮) bezeichneten Tonstufe, hat in der rein diatonischen Musik zunächst den Zweck, den in der Tonleiter vorkommenden *tritonus f—h* n eine reine Quarte zu verwandeln. Das *b* findet deshalb hauptsächlich in der dorischen und lydischen Octavengattung (d. i. *D—d* und *F—f*) und hier wieder namentlich bei der Vorbereitung der Cadenzen auf den Grundtönen derselben *d* und *f* seine Anwendung, z. B.

Das *b* theilt selbstverständlich in derselben Weise wie das Kreuz (♯) den ganzen Ton in zwei ungleiche Theile, nur in umgekehrter Folge, so dass wir hier den Limma-Schritt am unteren Ende und den der Apotome am oberen Ende haben. Beim grossen ganzen Tone ergeben sich folgende Verhältnisse:



Im zweiten (abwärtsgehenden) Beispiel steht der Ton *b*, wie wir sehen, um ein syntonisches Komma höher als im ersten. Beide Ton-

höhen kommen in der Praxis vor. Singt man vom *f* aus eine Quarte aufwärts, so wird *b* wie im ersten Beispiele lauten; singt man dagegen von *g* aus eine kleine Terz aufwärts, so wird man diese wie 5 : 6 und nicht wie 27 : 32 abmessen, und der Ton *b* rückt somit näher an *h* heran.

Setzen wir aber ein *b* an jene Stelle der Leiter, wo wir einen kleinen halben Ton haben, z. B. zwischen *d* und *e*, so erhalten wir:

§ 55.

Wie wir aus den bis jetzt gegebenen Beispielen sehen, kann das Intervall, welches man gewöhnlich ungenauerweise mit dem allgemeinen Ausdruck »halben Ton« zu bezeichnen pflegt, viererlei Grösse haben und zwar vom grössten zum kleinsten geordnet:

Das übermässige Limma	25 : 27	= 1,08
das diatonische Limma	15 : 16	= 1,066666..
die grössere Apotome	128 : 135	= 1,054687
die kleinere Apotome	24 : 25	= 1,041667.

Hier müssen wir noch als fünftes Intervall das sogenannte Pythagorische Limma hinzufügen, welches wir erhalten, wenn wir die grössere Apotome vom kleinen Ganztone abziehen:

kleiner Ganzton	9 : 10	= 1,111111..
grössere Apotome	128 : 135	= 1,054687
das pythagorische Limma	243 : 256	= 1,053498.

Den Namen pythagorisches Limma hat es daher, weil die Alten keinen Unterschied zwischen dem grossen und kleinen ganzen Ton annahmen, sondern nur das Verhältniss 8:9 als solchen kannten (vgl. § 84, 85, 86). Bei ihnen machten zwei Ganztöne eine grosse Terz aus = 64 : 81. Diese zogen sie von der reinen Quarte ab und erhielten dann als diatonischen Halbton jenes pythagorische Limma:

reine Quarte	3 : 4	= 1,333333
pythagorische grosse Terz	64 : 81	= 1,265625
pythagorisches Limma	243 : 256	= 1,053498,

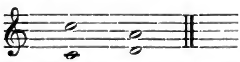
ein Intervall, welches ein wenig grösser als die moderne kleinere Apotome und ein wenig kleiner als die moderne grössere Apotome ist. Und

ziehen wir das so eben gefundene pythagorische Limma vom grossen ganzen Tone ab, so erhalten wir als sechstes Halbton-Intervall noch die sogenannte griechische oder pythagorische Apotome, welche um eine Kleinigkeit grösser als das moderne diatonische Limma ist, aber etwas kleiner als das moderne grössere oder übermässige Limma:

Der grosse Ganzton . .	8 : 9	= 1,125
das pythagorische Limma .	243 : 256	= 1,053498
die pythagorische Apotome	2048 : 2187	= 1,067871.

§ 56.

Von diesen hier gegebenen Theilungen der beiden ganzen Töne in kleinere und grössere Halbtöne mögen möglicherweise zwar nicht alle gerade in der praktischen Musik zur Anwendung kommen; doch ist auch hier die mögliche Theilung eine sehr vielfache. Die Sänger haben in einem mehrstimmigen Gesange, wenn sie mit guten musikalischen Ohren begabt sind und hören gelernt haben, stets das Bestreben, die vollkommenen Consonanzen auch vollkommen rein abzustimmen und auszuführen. Ohr und Stimme würden, wie bereits § 48 gesagt ist, ein Verhältniss wie 27 : 40 nicht singen können, an dessen Stelle dann 2 : 3 zu setzen ist. Man wird daher, wie a. a. O. ausgeführt ist, oft für den grossen ganzen Ton den kleinen und umgekehrt für den kleinen den grossen setzen müssen. Andererseits wird der Ausgleich bisweilen auch dadurch stattfinden können, dass, wenn z. B. in einem zweistimmigen Satze die Stimmen so zu singen haben:



die eine Stimme unwillkührlich etwas nach der Höhe, die andere ein wenig nach der Tiefe ausweicht. Jeder der beiden Sänger würde also in dem vorliegenden Falle seine Intonation um die Hälfte eines syntonischen Kommas zu moderiren haben. Das syntonische Komma würde sich in ganzen Zahlen als 160 : 161 : 162 in zwei nur wenig von einander verschiedene Hälften theilen lassen. 160 : 161 = 1,00625, und 161 : 162 = 1,006211.. Ueber diese Art des Ausgleichens s. weiter unten die §§ 62—66.

Noch bedeutendere und wesentlich verschiedene Abweichungen entstehen dann, wenn ein Musikstück über die Grenzen einer diatoni-

schen Tonleiter hinaus modulirt, chromatische Uebergänge macht, und so entfernte Tonarten mit einander verbindet, dass aus einem Halbton-Schritt, den wir als Limma aufgefasst haben, eine Apotome wird, und umgekehrt, was man bekanntlich Enharmonik nennt.

Der Unterschied zwischen diesen beiden Intervallen (Limma und Apotome) ist, jenachdem man die kleinere oder grössere Apotome vom gewöhnlichen diatonischen Limma oder vom übermässigen Limma abzieht, folgender:

Limma diatonicum	15 : 16	= 1,066666
kleinere Apotome	24 : 25	= 1,041667
mittlere Diesis	125 : 128	= 1,024.
Uebermässiges Limma	25 : 27	= 1,08
kleinere Apotome	24 : 25	= 1,041667
der sog. Drittelton	625 : 648	= 1,0368.
Limma diatonicum	15 : 16	= 1,066666
grössere Apotome	128 : 135	= 1,054687
Diaschisma	2025 : 2048	≐ 1,011358.
Uebermässiges Limma	25 : 27	= 1,08
grössere Apotome	128 : 135	= 1,054687
mittlere Diesis	125 : 128	= 1,024.

Die mittlere Diesis ist etwas kleiner als ein Viertelton, der sog. Drittelton wenig grösser als solcher, beide Intervalle addirt betragen:

Mittlere Diesis	125 : 128	= 1,024
sog. Drittelton	625 : 648	= 1,0368
	78125 : 82944	= 1,061632.

Dies Intervall hat beinahe die Grösse des diatonischen Limmas 15 : 16 = 1,066666.

§ 57.

Damit wir uns aber die bis jetzt gegebenen Theilungen besser versinnbildlichen können, rücke ich hier eine Figur ein, deren Hauptlinie *a—k* das Intervall des grossen ganzen Tones vorstellen soll. Auf derselben sind durch andere gekrümmte Linien die hier besprochenen Intervalle abgetheilt, so dass wir uns nicht nur davon eine Vorstellung machen können, in welchem Verhältniss diese Intervalle zum grossen

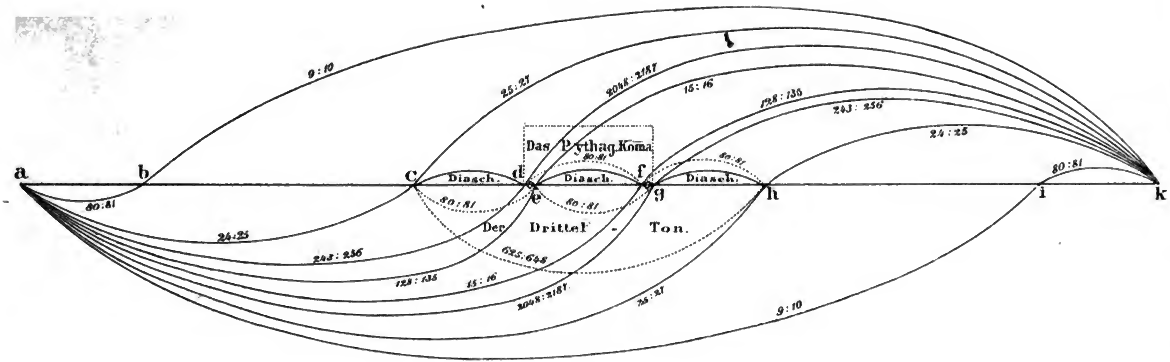
ganzen Ton stehen, sondern auch um wie viel das eine dieser Intervalle grösser als das andere ist; denn auch diese Differenzen sind für die musikalische Rechnung von Wichtigkeit, und treten auch in anderen (weiter unten vorkommenden) Combinationen zu Tage.

Siehe die lithographirte Darstellung auf der gegenüberstehenden Seite.

1.	Der grosse ganze Ton	8 : 9	= 1,125	*a–k.*
2.	Der kleine ganze Ton	9 : 10	= 1,111111	*a–i, b–k.*
3.	Der vermind. kleine ganze Ton . . .	729 : 800	= 1,097394	*b–i.*
4.	Das überm. Limma	25 : 27	= 1,08	*a–h, c–k.*
5.	Die griech. Apotome	2048 : 2187	= 1,067871	*a–g, d–k.*
6.	Das diatonische Limma oder der grosse halbe Ton . . .	15 : 16	= 1,066666..	*a–f, b–h, c–i, e–k.*
7.	Die grössere Apotome	128 : 135	= 1,054687	*a–e, b–g, d–i, f–k.*
8.	Das pythagorische Limma	243 : 256	= 1,053498	*a–d, b–f, c–i, g–k.*
9.	Die kleinere Apotome	24 : 25	= 1,041666..	*a–c, b–e, f–i, h–k.*
10.	Das um ein syntonisches Komma verm. pythagorische Limma	19683 : 20480	= 1,040492	*b–d, g–i.*
11.	Der sogen. Drittelton	625 : 648	= 1,0368	*c–h.*
12.	Die grosse Diesis oder die um ein syntonisches Komma verm. kleinere Apotome .	243 : 250	= 1,028806	*b–c, h–i.*
13.	Der Unterschied zwischen der griechisch. u. der kleineren modernen Apotome .	6400 : 6561	= 1,025156	*c–g, d–h.*
14.	Die mittlere Diesis (s. Anm. § 58) . .	125 : 128	= 1,024	*c–f, e–h.*
15.	Das pythagorische Komma	524288 : 531441	= 1,013643	*d–g.*
16.	Das synton. Komma	80 : 81	= 1,0125	*a–b, c–e, d–f, e–g, f–h, i–k.*
17.	Das Diaschisma . .	2025 : 2048	= 1,011358	*c–d, e–f, g–h.*
18.	Das Schisma. . .	32768 : 32805	= 1,001129	*d–e, f–g.*

Der ganze Ton und seine Theilungen durch die verschiedenen sogen. halben Töne.

s. pag. 42.



Bemerkung. *Dieses graphische Bild des ganzen Tones ist in demselben Maassstab wie die am Ende des Buches befindliche Scala angefertigt, 203, 9 Millimeter für den grossen und 182, 4 M. für den kleinen ganzen Ton.*

§ 58.

Anmerkung 1. Das Intervall Nr. 15 heisst die mittlere Diesis weil es eine noch kleinere giebt, welche aber in der vorstehenden Tabelle nicht hat Platz finden können. Diese erhält man, wenn man die mittlere Diesis von der kleineren Apotome abzieht:

Kleinere Apotome	24 : 25	= 1,041666
mittlere Diesis	125 : 128	= 1,024
kleine Diesis	3072 : 3125	= 1,017253.

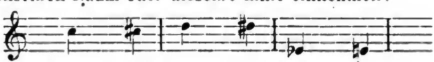
Die mittlere Diesis wird von vielen Schriftstellern auch nur schlechthin »Diesis« genannt.

§ 59.

Anmerkung 2. In den Schriften über Temperaturen, akustische Verhältnisse u. s. w. aus neuerer Zeit wird leider kein strenger Unterschied zwischen den Ausdrücken Limma und Apotome gemacht, wie es hier von mir geschehen ist. Unter Limma ist der ursprünglichen von den alten Griechen herrührenden Bedeutung gemäss stets derjenige Halbton zu verstehen, der durch zwei verschiedene Stufen des Ton- und somit auch des Noten- oder Linien-Systems gebildet wird, wie z. B. *e—f*, *fis—g*, *a—b* u. s. w., oder in Noten:

Limma, Limma, Limma.

Apotome ist dagegen jenes andere Halbton-Intervall, dessen beide Töne auf derselben Stufe stehen, wie *c—cis*, *d—dis*, *es—e* und im Linien-System denselben Raum oder dieselbe Linie einnehmen:



Apotome, Apotome, Apotome.

Und § 53 haben wir gesehen, wie der grosse und kleine Ganzton durch Apotome und Limma, und umgekehrt durch Limma und Apotome in zwei ungleiche Theile getheilt werden.

Die von den meisten heutigen Schriftstellern gebrauchte Benennung ist dagegen folgende: Das Intervall 15:16 nennen sie den grossen halben Ton, und das Intervall 24 : 25 den kleinen halben Ton, wir bezeichnen diese beiden Intervalle besser durch diatonisches Limma und kleinere Apotome. — Das Verhältniss 128:135, welches wir die grössere Apotome

nennen, heisst bei ihnen kleines Limma und das übermässige Limma 25:27, grosses Limma. — Die Verhältnisse 243 : 256 und 2048 : 2187 nennen sie in Uebereinstimmung mit uns und den Alten pythagorisches Limma und griechische oder pythagorische Apotome.

§ 60.

Von den Intervallen auf der obigen Tabelle § 59 wollen wir das in der Mitte stehende pythagorische Komma als besonders wichtig für die musikalischen Verhältnisse hervorheben, weil wir dasselbe auch dadurch erhalten, wenn wir von irgend einem Tone aus bis zu seiner zwölften Quinte fortschreiten. Gehen wir z. B. von *c* aus nach *g*, dann nach *d*, nach *a*, nach *e*, u. s. w., so kommen wir mit dem zwölften Schritt nach *his*, welches aber nicht mit jenem ersten *c* übereinstimmt, sondern eben um jenes pythagorische Komma zu hoch ist. Hierüber weiter unten in den §§ 70 und 71 ausführlicher. — Dieses pythagorische Komma ist um ein sehr kleines Intervall, um das Schisma, 32768 : 32805 = 1,001129, grösser als das syntonische Komma.

§ 61.

Aus der Natur der consonirenden Intervalle und ihrem inneren Zusammenhange erkennen wir (was wir schon in früheren §§ andeuteten,) dass eine wirklich reine, wohltönende und in harmonischer Beziehung befriedigende Musik nur durch den Gesang lebender Menschenstimmen hervorgebracht werden kann. Denn der richtig und fein hörende Sänger allein ist im Stande, mit seiner Stimme fortwährend einen Ausgleich eintretender Unreinheiten vornehmen zu können. Beim Instrumentenspiel ist dies nicht möglich, einmal weil dasselbe mechanische Mittel zur Hervorbringung des Tones erfordert, welche nicht in dem Maasse, wie die Stimme, dem feinen Sinne des Ohres folgen können. Zweitens aber auch, weil die Instrumente gewisse vor dem Spiele genau abzustimmende Töne haben, deren Höhe während des Spieles unveränderlich ist, während es gerade zum Wesen der wahren Harmonie gehört, dass eine jede Stufe der Leiter beweglich ist. Von allen Instrumenten dürften in dieser Beziehung die Posaunen der menschlichen Stimme am nächsten kommen. Auch auf Geigeninstrumenten liesse sich, wenn wirklich durchgebildete Virtuosen, welche ein feines Ohr und zugleich gründliche Kenntnisse in der theoretischen Musik besitzen, zusammenkommen, vielleicht jene im Gesange darstellbare Reinheit der Sympho-

nien erzielen, doch müssten dieselben es gänzlich vermeiden, die blossen Saiten zu benutzen; denn diese werden nach reinen Quinten 2 : 3 abgestimmt, die Violine z. B.

$$g—d'—a'—e''.$$

Wir wissen aber, dass uns schon die dritte Quinte eine unreine grosse Sexte ($2^3 : 3^3 = 8 : 27 = 16 : 27$) bringt, so dass wir nimmermehr die blosse *g*- und *e''*-Saite zu gleicher Zeit gebrauchen können. Ferner steht die *C*-Saite der Bratsche und des Violoncelles zu dem *e''* der Violine in dem Verhältniss der pythagorischen Terz 64 : 81. — Ist nun schon auf den Saiten-Instrumenten ein den natürlichen harmonischen Verhältnissen angemessenes Spiel nur unter höchst günstigen Umständen herzustellen, so wächst diese Schwierigkeit bei der Verbindung verschiedener Instrumenten-Gattungen. In unserm Orchester, wo Blech- und Holzblase-Instrumente neben Geigen und Harfen zusammen wirken sollen, muss man natürlich von vorn herein auf Reinheit und wirklichen Wohlklang verzichten.

§ 62.

Das gegenseitige Ausgleichen der Stimmen auf den consonirenden Zusammenklängen ist es, was wir in dem nicht von Instrumenten begleiteten Gesange Temperatur nennen, (vergl. §§ 44 und 48). Es ist daher klar, dass ein Chordirigent und Gesanglehrer neben einem guten Ohre auch gründliche theoretische Kenntnisse besitzen muss, wenn er seine Sänger in richtiger Weise anleiten will. Jn einzelnen Fällen wird er ihnen zeigen müssen, dass es hier und dort besonders darauf ankommt, einen halben oder ganzen Ton einmal grösser, ein andermal etwas kleiner als gewöhnlich zu nehmen u. s. w.

§ 63.

Nun kommt aber noch etwas hinzu, was wir nicht übersehen dürfen. Im Allgemeinen kann man wohl annehmen, dass eine diatonische mehrstimmige Composition — (vielleicht mehr durch Zufall als durch Absicht des Componisten) — so eingerichtet ist, dass bei einer reinen Intonation aller consonirenden Intervalle die Stimmen einmal um ein Komma sinken, an einer anderen Stelle wieder um ein solches steigen werden, und so fort; und hierbei hat es keine weitere Bedeutung, wenn nach dem Verlaufe eines längeren Stückes der Schlusston gegen den Anfangston um eine kaum merkliche Kleinigkeit (also etwa um ein syn-

tonisches Komma) höher oder tiefer steht. Dies können wir als das Normale annehmen.

Nun giebt es aber Tonfolgen, die so beschaffen sind, dass sie, wenn alle Consonanzen in ihnen rein abgestimmt werden, schon nach Verlauf von wenigen Noten ihre Stimmung um ein Komma 80:81, (sei es nach der Tiefe oder nach der Höhe hin) verändert haben. Wenn sich dann, wie es ja leicht vorkommen kann, eine solche Wendung mehrmals wiederholt, so wird bald eine bedeutendere Differenz von der zu Anfang des Gesanges angenommenen Tonhöhe bemerklich werden, wodurch wir dann, da unser Ohr auch für die absolute Tonhöhe bis zu einem gewissen Grade empfindlich ist, bald das Gefühl für die angenommene Tonart verlieren würden. Ich wenigstens kann (um von meiner eigenen musikalischen Empfindung zu sprechen) nur sagen, dass, wenn ich einen Chor z. B. in *C*-dur habe beginnen hören, und derselbe ist während des Singens einen halben Ton (also nach *H*-dur) gesunken, mir die ganze Modulation nicht so klar erscheint, als wenn er seine Tonhöhe festgehalten hätte, auch dann, wenn bei jenem Sinken der Stimmen die einzelnen Symphonien in sich rein waren, was sehr wohl möglich ist. Das Ohr verlangt also zweierlei, und zwar in erster Linie einen Ausgleich, eine vollkommene Reinheit aller Consonanzen, was in manchen Fällen eine kleine Veränderung der absoluten Tonhöhe nach sich zieht. Daneben verlangt es aber auch ein Festhalten (wenn auch kein ganz unbedingtes) jener angenommenen Tonhöhe. Beide Dinge müssen daher von den Sängern berücksichtigt werden. Betrachten wir zu diesem Zwecke folgendes kurze Sätzchen:

Wir sehen hier bei einer vollkommen reinen Ausführung aller Melodienschritte und Symphonien, dass der Grundton *c* schon nach vier höchst einfachen Accordfolgen um ein syntonisches Komma gesunken ist. Denken wir uns dies als den Anfang einer zweichörigen Composition, in

welcher der zweite Chor im vierten Takte genau mit der Wendung des ersten einsetzte, so hätten wir im siebenten Takte bereits eine Differenz von zwei Kommata.

Bei solchen Stellen ist daher an die Sänger die Forderung zu stellen, beim Singen ein weniges (— d. h. ein unmerkliches —) hinaufzutreiben, was in dem vorliegenden Falle sehr leicht während des *»Domine«* auf dem *F*-Dreiklange geschehen kann. Ausserdem ist dann noch der Tenor anzuhalten, den Schritt von *c* nach *d* recht weit hinauf, und der Bass, den von *f* nach *d* hinab recht knapp zu nehmen. Wenn hierbei die Oberstimmen recht genau auf die Unterstimmen hören und sich nach diesen richten, so werden die Consonanzen rein klingen, ohne dass man das Hinauftreiben irgendwie bemerken kann. Dergleichen Kunstgriffe sind überall von Nöthen.

§ 64.

Es kann aber auch der umgekehrte Fall eintreten, dass durch die Intervallenfolge die Stimmung nach wenigen Noten um ein Komma steigt, z. B. hier:

$\overbrace{8 : 9,\ 5 : 6}^{20\ :\ 27}$

$\underbrace{2 : 3,\ 4 : 3,\ 2 : 3,\ 5 : 4,\ 8 : 9,\ 3 : 2.}_{80\ :\ 81.}$

Nach mehrmaliger Wiederholung dieses Sätzchens würden wir um einige Kommata in die Höhe gegangen sein. Dergleichen Stellen sind für die Praxis weniger gefährlich, weil die Neigung der Sänger zum Sinken nicht so selten ist und selbst bisweilen bei vorzüglich geschulten Chören vorkommt. Gehen die Stimmen aber wider Vermuthen zu sehr in die Höhe, so muss man sie ein wenig herabdrücken lassen, umgekehrt wie oben angegeben ist.

§ 65.

Ein dritter Punkt ist nun noch *der*, dass im zwei- und mehrstimmigen Satze sehr leicht verschiedene Melodien zusammenkommen kön-

nen, von denen die eine bei reiner Ausführung ihrer Intervalle um ein Komma steigt, die andere um ebensoviel sinkt. Betrachten wir die beiden folgenden (allerdings nur zu diesem Zwecke erfundenen und daher etwas steifen) Melodien:

3 : 2, 3 : 4, 6 : 5, 3 : 4.

$c = 81.$ $c = 80.$

In diesem ersten Sätzchen sehen wir den Schlusston *c* um ein syntonisches Komma tiefer als die zweite Note *c*, gleich nach dem Anfangston. Ebenso steht auch die fünfte Note *g* tiefer als die erste. Durch den Schritt von *f* nach $d = 6 : 5$ (statt 32 : 27) ist hier die tiefere Stimmung entstanden.

In der folgenden Melodie ist es umgekehrt. Das quintenweise Aufwärtssteigen drängt naturgemäss in die Höhe und die vierte Note *a* verhält sich zum Anfangston *c* nicht mehr wie 3 : 5, sondern wie 16 : 27; die fünfte Note *g* nicht mehr wie 2 : 3 zu diesem, sondern wie (2 : 3). (80 : 81) = 160 : 243.

2 : 3, 4 : 3, 2 : 3, 4 : 3, 5 : 6.

160 : 243

In diesen beiden Melodien, wenn sie genau von derselben Tonhöhe der Quinte *c—g* ausgehen und in beiden alle in ihnen vorkommenden Intervalle vollkommen rein genommen werden, differirt der Schlusston der einen (*c*) von dem Schlusston der anderen (ebenfalls *c*) um zwei syntonische Kommata, und dennoch bilden beide Melodien einen zweistimmigen Satz, der nicht den geringsten Verstoss gegen die strengsten contrapunktischen Regeln zeigt:

1 2 3 4 5

Hier ist die Reinheit der Symphonien nur dadurch zu ermöglichen, dass die erste Stimme den Quartensprung aufwärts von *c* nach *f* eine Kleinigkeit zu hoch und die zweite den von *g* nach *d* abwärts um ebensoviel zu tief nimmt, so dass die kleine Terz zwischen den beiden Stimmen (*d*—*f*) dann in dem reinen Verhältniss 5:6 erklingt, d. h., dass beide Stimmen den Quartensprung von der zweiten zur dritten Note etwa um ein halbes syntonisches Komma zu gross nehmen. Dasselbe muss sich dann von der vierten zur fünften Note wiederholen. In solchen Fällen ist dann die Reinheit der Melodienschritte nicht mehr möglich, wohl aber die Reinheit der Zusammenklänge, die man niemals unberücksichtigt lassen darf.

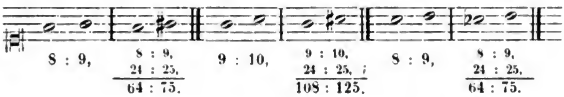
§ 66.

Alterirte Intervalle. Wir haben in den §§ 51—54 gesehen, dass einzelne Töne auch in der streng diatonischen Schreibweise eine Erhöhung oder Erniedrigung um eine Apotome erfahren können. Die Intervalle, welche wir hierdurch bekommen haben, sind uns schon anderweitig durch die Tonleiter bekannt. So ist z. B. aus der kleinen Terz *e*—*g* durch Erhöhung des *g* in *gis* die grosse Terz *e*—*gis* entstanden, ein Intervall von der Beschaffenheit wie *c*—*e*, *f*—*a* und *g*—*h*; aus dem Tritonus *f*—*h* haben wir durch Erniedrigung des *h* in *b* die reine Quarte *f*—*b* erhalten, die in ihrer Grösse genau mit *c*—*f*, *d*—*g* und den andern reinen Quarten übereinstimmt. Nun können aber durch solche Erhöhungen und Erniedrigungen auch Intervalle entstehen, die sonst nicht in der diatonischen Leiter enthalten sind, diese nennt man alterirte oder chromatisch-alterirte Intervalle, es sind folgende sechs*):

1. Die übermässige Secunde, welche dadurch entsteht, dass man in der grossen Secunde (oder dem Ganztone 8 : 9 und 9 : 10) ent-

*) Die alterirten Intervalle kommen hauptsächlich bei einer freieren, über die engen Gränzen einer Tonart hinausgehenden Modulation zur Anwendung; sie sollten daher erst nach den folgenden §§ (Erweiterung des Systemes durch Hinzufügung neuer diatonischer Systeme) besprochen werden. Da einzelne jedoch auch im strengen diatonischen Style vorkommen können und späterhin nicht wohl Gelegenheit ist, auf sie zurückzukommen, so mögen sie hier eine kurze Erwähnung finden. Was ihre Schwingungszahlen anbetrifft, so will ich bemerken, dass von jedem der alterirten Intervalle nur die näher liegenden Verhältnisse angegeben sind und dass bei einer freieren chromatischen oder gar enharmonischen Modulation dieselben in mannigfaltiger Weise wechseln können, wie aus dem Intervallen-Verzeichniss § 93 zu ersehen ist.

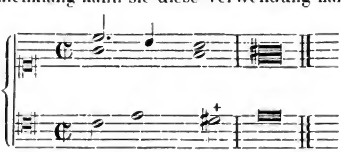
weder den höheren Ton um eine kleine Apotome erhöht oder den tieferen um dieses Intervall erniedrigt, z. B.



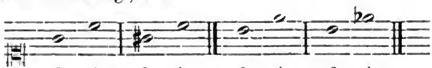
Beide Intervalle (64 : 75 und 108 : 125) kommen in der Praxis vor, namentlich aber das erstere Verhältniss, bisweilen als melodischer Schritt, häufiger jedoch als Zusammenklang, z. B.

2. Die verminderte Terz. Dieselbe besteht entweder aus zwei Limmata und verhält sich dann wie $15^2:16^2 = 225:256$; oder sie hat die Grösse 125 : 144, welches Verhältniss man dadurch erhält, dass man die kleinere Apotome (24 : 25) von der kleinen Terz (5 : 6) abzieht. Die verminderte Terz ist weder in dem einen noch in dem anderen Verhältniss schön; als Melodienschritt ist sie schwer zu treffen und als Zusammenklang ist sie eine sehr rauhe, harte Dissonanz. Doch kommt sie in beiderlei Verwendung schon bei den Componisten des siebzehnten Jahrhunderts vor. So giebt es z. B. ein *Christus factus est* von Felice Anerio, in welchem wir gegen den Schluss folgende Anwendung der abwärtssteigenden verminderten Terz *as—fis* im Alt sehen:

Als Zusammenklang kann sie diese Verwendung haben:



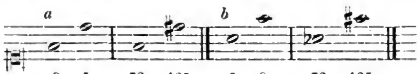
3. Neben der reinen Quarte und dem *Tritonus* kommt noch die verminderte Quarte vor, bestehend aus zwei Limmata und einem ganzen Ton. Man erhält sie dadurch, dass man in der reinen Quarte den tieferen Ton um eine kleinere Apotome erhöht, oder den höheren um dieses Intervall erniedrigt, z. B.



3 : 4, 3 : 4, 24 : 25, 25 : 32. 3 : 4, 3 : 4, 24 : 25, 25 : 32.

4. Die übermässige Quinte, die Umkehrung der verminderten Quarte, erhalten wir durch Erhöhung des oberen Tones oder Erniedrigung des tieferen der reinen Quinte, sie verhält sich also wie 16 : 25. Ihre Anwendung, wie wir sie in dem folgenden Sätzchen sehen, ist auch im strengsten Style statthaft:

5. Die übermässige Sexte, 72 : 125, erhalten wir dadurch, dass wir in der grossen Sexte (3 : 5) den oberen Ton um eine kleinere Apotome erhöhen (a), oder in der kleinen Sexte den oberen Ton um dieses Intervall erhöhen und den tieferen um dasselbe erniedrigen (b):



3 : 5, 72 : 125, 5 : 8, 72 : 125.

Es ist dies ein sehr wirkungsvolles in der modernen Musik häufig vorkommendes Intervall, z. B.:

Die Umkehrung hiervon ist die rauh- und hartklingende verminderte Terz.

6. Die **verminderte Septime**, die Umkehrung der übermässigen Secunde. Wir erhalten dieselbe dadurch, dass wir in der kleinen Septime (9 : 16 oder 5 : 9) den tieferen Ton um die kleinere Apotome erhöhen oder den höheren um dieses Intervall erniedrigen, z. B.:

9 : 16, 75 : 128, 5 : 9, 125 : 216.

Beide Grössen dieses Intervalles kommen in der Musik vor, namentlich aber das Verhältniss 75:128, worüber wir bereits § 47 gesprochen haben.

§ 67.

Andere als die hier aufgezählten alterirten Intervalle kann es nicht geben, falls man nicht noch eine verminderte Secunde annehmen will*). Mit diesem Namen würde man den Schritt von *cis* nach *des*, oder von *dis* nach *es* u. s. w. bezeichnen können, mit welchem aber stets eine

*) Es ist hier natürlich nur von einer für das Ohr wirklich fassbaren Vocalmusik die Rede. In der Instrumentalmusik ist mit Hülfe von chromatischen Druchgängen und aufwärtssteigenden Vorhalten noch manches andere alterirte Intervall möglich, z. B. die übermässige Terz (*e—eis*):

ja selbst ein aus zwei Apotomen zusammengesetztes Intervall, z. B. *des—dis*, liesse sich im Zusammenklange anwenden. Man könnte dasselbe vielleicht mit dem Namen einer doppelt-übermässigen Prime bezeichnen:

In modernen Instrumental-Compositionen kommen dergleichen Wendungen in der That hin und wieder vor.

enharmonische Rückung verbunden ist, wie z. B. in der folgenden Stelle des *Ave verum corpus* von Mozart.

Hier ist die Modulation bei ×× nur dadurch erklärlich, dass der Tenor das *cis* in *des* verwandelt, d. h. dass er so singt:

so dass wir den Schritt von *cis* nach *c* abwärts nicht als eine Apotome sondern als ein Limma auffassen. Wenn der Chor hier rein klingen soll, so muss der Tenor auch in der That die enharmonische Rückung ausführen, indem er eine mittlere Diesis (125 : 128, also ungefähr einen kleinen Viertelton) in die Höhe rückt und dann erst ein Limma abwärts nach *c* geht. Ich habe wenigstens immer gefunden, dass man hierdurch eher die Reinheit dieser schwierigen Stelle erzielt, als wenn man, ohne die Rückung ausführen zu lassen, nur darauf sieht, dass der Schritt *cis—c* recht klein (also wie eine kleinere Apotome = 24 : 25) genommen wird.

Erweiterung des Systemes durch Hinzufügung neuer diatonischer Systeme.

§ 68.

So wie wir durch die Verbindung der drei Dur-Dreiklänge auf *c*, *f* und *g* eine diatonische Tonleiter erhalten haben, welche wir der Kürze wegen nach ihrem Ausgangs-Tone *C* mit dem Namen *C*-Dur,

f—g—a—h-**c—d—e-f—g—a—h**-**c**—*d—e-f—g*,

bezeichnen wollen, so können wir auch von den verschiedenen Stufen dieses Systemes aus neue diatonische Systeme bilden, indem wir irgend einer der vorhandenen Stufen ihre reine Quinte (2 : 3) und ihre reine Quarte (3 : 4) hinzufügen, und nun auf diesen drei Stufen je einen Dur-Dreiklang (4 : 5 : 6) errichten. Wählen wir hierzu, um ein Beispiel zu haben, den Ton *a*, so erhalten wir:

a—cis—e
4 : 5 : 6

d—fis—a   *e—gis—h*
4 : 5 : 6   4 : 5 : 6,

oder stufenweise geordnet:

fis—gis - **a—h—cis-d—e—fis—gis-a**—*h*—*cis*
20:22½:24:27: 30:32:36: 40 : 45:48:54:60 u. s. w.

Diese von dem Tone *A* aus construirte Leiter aber ist, wenn wir von dem zuerst gefundenen *C*-Dur ausgehen, nicht die nächstliegende Scala. Das sind vielmehr diejenigen, deren Grundtöne zu dem Grundton jenes *C*-Systemes in den consonirenden Verhältnissen der Quinte und Quarte stehen, nämlich die *G*- und *F*-Leiter.

Denn wenn wir von *G* aus eine neue Leiter bilden, so finden wir auf dem Grundton *G* und der Quarte *C* bereits fertige Durdreiklänge vor, und wir haben nur noch der Quinte *D* einen solchen (nämlich *d—fis—a*) hinzuzufügen. — Ebenso bequem ist die Errichtung eines neuen Systemes von *F* aus, wo wir auf dem *F*, dem neuen Grundton, und auf der Quinte *C* bereits fertige Dreiklänge haben. Hier müssen wir dem *F* noch die Quarte *B* hinzufügen und dann auch auf dieser einen Dreiklang (*b—d—f*) errichten. Es folgen hier die drei Systeme von *G*, *C* und *F* über einander gestellt:

d—e—fis-**g—a—h-c—d—e—fis-g**—*a—h-c—d*
d—e-f—g—a—h-**c—d—e-f—g—a—h-c**—*d*
d—e-**f—g—a-b—c—d—e-f**—*g—a-b—c—d.*

§ 69.

Wir sehen, dass uns sowohl die oberste Reihe (*G*-Dur) als auch die unterste (*F*-Dur) dieselben Verhältnisse wie die mittelste, von der wir ausgingen, bietet; denn alle drei sind auf dieselbe Weise entstanden und haben genau dieselben Zahlenverhältnisse. In jeder Dur-Octave haben wir von der ersten zur zweiten Stufe einen grossen ganzen Ton 8 : 9, von der zweiten zur dritten einen kleinen ganzen Ton 9 : 10, von der dritten zur vierten ein *Limma diatonicum* 15 : 16 u. s. f. — Dagegen stehen die mit gleichen Buchstaben geschriebenen Intervalle nicht immer in denselben Verhältnissen. Der Schritt *c—d* verhält sich in *C*-Dur wie 8 : 9, ebenso in *G*-Dur; dagegen in *F*-Dur wie 9 : 10. Der Schritt *g—a* in *G*-Dur wie 8 : 9, in *C*-Dur und *F*-Dur wie 9 : 10. In *C*-Dur ist die Quinte *d—a* = 27:40, in den beiden anderen Tonarten ist sie rein = 2:3; dagegen verhält sich in *G*-Dur die Quinte *a—e* = 27 : 40, und in *F*-Dur steht *g—d* in diesem Verhältniss, u. s. w.

§ 70.

Wir können nun in der Bildung neuer Systeme fortfahren: Auf der Quinte von *G*-Dur finden wir den Grundton von *D*-Dur; auf der Quinte von *D*-Dur den von *A*-Dur, dann den von *E*-Dur, von *H*-Dur, von *Fis*-Dur, von *Cis*-Dur. — Ebenso können wir nach der anderen Seite fortschreiten. Von *F*-Dur kommen wir nach *B*-Dur, dann nach *Es*-Dur, nach *As*-Dur, nach *Des*-Dur, nach *Ces*-Dur u. s. w. *in infinitum*. Die folgende Tabelle enthält sämmtliche Tonarten bis zur siebenten Quinte aufwärts und bis zur siebenten Quinte abwärts von c.

fis gis ais his **cis—dis—eis-fis—gis—ais—his-cis** *dis eis*

fis—gis—ais-h—cis—dis—eis-fis *gis ais h cis dis eis*

fis gis ais **h—cis—dis-e— fis—gis—ais-h** *cis dis e*

fis gis a h cis dis **e— fis—gis-a — h — cis—dis-e**

fis gis **a — h — cis-d — e — fis—gis-a** *h cis d e*

fis g a h cis **d — e — fis-g — a — h — cis-d** *e*

fis **g — a — h-c — d — e — fis-g** *a h c d e*

f g a h **c — d — e-f — g — a — h-c** *d e f*

f g a b c d e **f — g — a-b — c — d — e-f**

f g a **b — c — d-es — f — g — a-b** *c d e f*

f g as b c d **es — f — g-as — b — c — d-es** *f*

f g **as—b — c-des — es — f — g-as** *b c des es f*

f ges as b c **des — es — f-ges — as — b — c-des** *es f*

ges—as—b-ces—des — es — f-ges *as b cis des es f*

ges as b **ces—des — es-fes—ges— as — b-ces** *des es fes*

Die Grundtöne dieser Systeme stehen, wie wir sie auf der Tabelle vor uns sehen, von unten nach oben gerechnet in dem Verhältniss der reinen Quinte 2 : 3 oder deren Umkehrung 3 : 4. Wir gehen von *ces* zu *ges* = 2 : 3 oder 3 : 4, von *ges* nach *des* = 2 : 3 oder 3 : 4, von *des* nach *as* = 2 : 3 oder 3 : 4 u. s. f. — Hierdurch ist das System ohne Ende, da wir durch die Verbindung noch so vieler Quinten niemals auf den Grundton zurückgeführt werden, von welchem wir ausgegangen sind, d. h. *ces* stimmt nicht mit dem zwölf Quinten höher stehenden *h* überein. Die zwölfte Quinte verhält sich zu ihrem Ausgangspunkt wie

$$524288 : 531441 = 1{,}013643,$$

steht also um ein pythagorisches Komma zu hoch. Dieses pythagorische Komma ist, wie wir § 57 auf der Intervallen-Tabelle des ganzen Tones

sehen können, um ein Schisma (32768 : 32805 = 1,001129) grösser als das syntonische Komma.

§ 71.

Um die zwölfte Quinte, die aber ebenso gut, um nicht in unerreichbare Tonhöhen zu kommen, durch Division ihrer Schwingungszahl mit 2 in die Quarte verkehrt werden kann, zu berechnen, muss man beide Glieder des Verhältnisses 2 : 3 mit 2^{17} multipliciren. Wir erhalten dann

$$2 \times 2^{17} = 262144$$
$$3 \times 2^{17} = 393216.$$

Für diese beide Zahlen wollen wir c (= 262144) und g (= 393216) setzen. Wir erhalten nun die folgende Zahl für die nächste Quinte d dadurch, dass wir die Schwingungszahl von g ins Quadrat erheben und mit der Schwingungszahl von c dividiren, und so fort, bis wir zu *his* kommen. In dieser Weise berechnet erhalten wir folgende Zahlen:

$$c = 262144.$$
$$g = 393216.$$

$$d = \frac{393216^2}{262144} = 589824, \text{ hierfür die tiefere Octave} = 294912$$

$$a = \frac{294912^2}{393216} = 442368$$

$$e = \frac{442368^2}{294912} = 663552, \text{ tiefere Octave} = 331776$$

$$h = \frac{331776^2}{442368} = 497664$$

$$fis = \frac{497664^2}{331776} = 746496, \text{ tiefere Octave} = 373248$$

$$cis = \frac{373248^2}{497664} = 559872, \text{ tiefere Octave} = 279936$$

$$gis = \frac{279936^2}{373248} = 419904$$

$$dis = \frac{419904^2}{279936} = 629856, \text{ tiefere Octave} = 314928$$

$$ais = \frac{314928^2}{419904} = 472392$$

$$eis = \frac{472392^2}{314928} = 708588, \text{ tiefere Octave} = 354294$$

$$his = \frac{354294^2}{472392} = 531441.$$

§ 72.

Ordnen wir die hier als aufwärtssteigende Quinten oder abwärtssteigende Quarten gefundenen Töne von der Tiefe nach der Höhe, so erhalten wir eine chromatische Tonleiter,

c—cis—d—dis—e—eis—fis—g—gis—a—ais—h—his,

in welcher die auf einer Stufe stehenden Halbtöne (also *c—cis*, *d—dis*, *e—eis* u.s.w.) das Verhältniss der pythagorischen Apotome = 2048 : 2187, die andern dagegen (*cis—d*, *dis—e*, *fis—g* u. s. w.) das Verhältniss des pythagorischen Limma's = 243 : 256 haben. Beide Intervalle, nämlich die pythag. Apotome und das pythag. Limma, betragen zusammen 8 : 9. Wir erhalten das Intervall *c—his'* daher auch als $8^6 : 9^6$. In den drei tiefsten Ganztönen geht die Apotome dem Limma voraus, in den drei höheren ist es umgekehrt.

	his = 531441		
		pythag. Apotome = 2048 : 2187 = 1,067871	
8 : 9	*h* = 497664		
		pythag. Limma = 243 : 256 = 1,053498	
	ais = 472392		
		Apotome	
8 : 9	*a* = 442368		
		Limma	
	gis = 419904		
		Apotome	
: 9	*g* = 393216		
		Limma	59049 : 65536 = 1,109858
	fis = 373248		
		Limma	
8 : 9	*eis* = 354294		
		Apotome	
	e = 331776		
		Limma	
8 : 9	*dis* = 314928		
		Apotome	
	d = 294912		
		Limma	
8 : 9	*cis* = 279936		
		Apotome.	
	c = 262144		

Das in der Mitte stehende Intervall von zwei pythagorischen Limmata, 59049:65536 = 1,109858, ist um ein pythagorisches Komma kleiner als der grosse ganze Ton 8 : 9. Dagegen ist die Verbindung zweier griechischer Apotomen um ein solches grösser als der grosse ganze Ton und verhält sich wie 4194304 : 4782969 = 1,140349.

§ 73.

Die strenge diatonische Musik, wie sie im sechszehnten Jahrhundert blühte, bewegte sich im Grossen und Ganzen nur in e i n e r Tonart, und nur in seltenen Fällen sehen wir, dass sie zur nächstverwandten Tonart der Quarte und Quinte hinübermodulirt. Die moderne Musik ist in die-

ser Beziehung immer freier geworden, wie wir schon an den Compositionen des siebzehnten und achtzehnten Jahrhunderts sehen können, in denen man allmählich anfing über die von den älteren Componisten aufgestellten Gränzen einer Tonart hinauszugehen. Was wir aber unter den Gränzen einer Tonart verstehen, dürfte allen denen bekannt sein, die nach richtigen Grundsätzen contrapunktiren gelernt haben. Und wir wollen, um nicht missverstanden zu werden, hier in der Kürze noch hinzufügen, dass auch im allerstrengsten diatonischen Styl auf allen Stufen der Leiter vollkommene Cadenzen gemacht werden können, von denen einige sogar eine Erhöhung durch ein Kreuz, also die Veränderung einer diatonischen Stufe verlangen (vergl. § 51). Von dieser Cadenzbildung ist allein diejenige Stufe ausgeschlossen, welche die sechste Octavengattung (s. § 50) begränzt. Das ist also im natürlichen System von *C* die Octave *H-c—d—e-f—g—a-h*; im System von *G* die Octave *Fis-g—a—h-c—d—e—fis*; im System von *D* die Octave *Cis-d—e—fis-g—a—h—cis* u. s. w. — Diese Cadenzen führen uns also nicht in neue Tonarten, sondern repräsentiren die Schlüsse auf den verschiedenen Stufen ein und desselben Systemes. — Wenn wir nun aber über eine Tonart hinausgehen und nach fremden Systemen hinüber moduliren wollen, so kann dies auf sehr mannigfaltige Weise geschehen. Das natürlichste hierbei ist, von irgend einer Tonart in die nächstverwandte Tonart (also quinten- und quartenweise) fortzuschreiten. Man kann aber auch ohne Vermittelung in weiter entlegene überspringen; und auch hier ist das Mittel der Modulation die Cadenz, worauf wir jedoch jetzt nicht näher eingehen können, da dies uns zu weit von unserm Gegenstande abführen würde, denn die Modulationslehre ist ein Theil der praktischen Compositionslehre. Je mehr wir aber durch Modulationen die Tonarten mit einander vermischen, je schneller wir den Wechsel in denselben eintreten lassen, desto schwieriger wird das Reinsingen, d. h. der Ausgleich der Consonanzen und das Festhalten der ursprünglich angenommenen Tonhöhe; desshalb muss man auch in unserer Zeit, wenn es darauf ankommt einen guten A capella-Gesang herzustellen, wieder zu jener einfacheren mehr auf e i n e r Tonart sich gründenden Modulation zurückkehren, die ja durch eine schöne Abwechslung der Cadenzen auf den Grundtönen von sechs verschiedenen Octavengattungen und manche andere Mittel einen grossen harmonischen Reichthum in sich birgt, welcher sich allerdings nur denen, die tiefere contrapunktische Studien gemacht haben, erschliessen wird.

Da sich nun aber mit der Zeit (hervorgerufen durch ein Streben nach lebhafterem musikalischem Ausdruck) jene freiere und weitere Modulation Bahn brach, und da hierdurch die Ausführung der in dieser neueren Weise componirten Gesänge immer schwieriger wurde, zumal man auch in Bezug auf die Behandlung der Dissonanzen grössere Freiheiten eintreten liess, so nahm man zu einer Unterstützung des Gesanges durch Instrumentenspiel seine Zuflucht. Hiermit gab man aber, vielleicht ohne des Uebelstandes sich ganz bewusst zu werden, die vollkommene Reinheit der harmonischen Verhältnisse auf; denn auf jenen zum Theil mechanisch vor dem Gebrauch abgestimmten Instrumenten konnte ein so vollkommener Ausgleich der Consonanzen wie im Gesange nicht mehr stattfinden.

Dies führte zu feststehenden Temperaturen, von denen wir in den folgenden §§ zunächst die sogenannte gleichschwebende Temperatur näher betrachten wollen.

Die gleichschwebende Temperatur.

§ 74.

Da der Unterschied der Intervalle, des grossen und kleinen ganzen Tones, dann die Unterschiede der verschiedenen halben Töne unter einander in der That nicht sehr gross sind und die halben Töne durchschnittlich beinahe ungefähr die halbe Grösse der durchschnittlichen Grösse der ganzen Töne haben, so hat man bei der Stimmung von Instrumenten den Versuch gemacht, für die eigentliche reine Stimmung der Intervalle,

> die aber (wie wir § 63 und 64 gesehen haben) niemals eine feststehende sein kann, sondern gerade beim vollkommensten und reinsten Musiciren um einige kleine kaum merkliche Kommata auf- und abwärts schwankt,

eine allgemeine Eintheilung der Octave als Surrogat der wirklichen Harmonie eintreten zu lassen, indem man die Octave in zwölf möglichst gleiche Theile zu theilen versuchte, so dass man nun einen solcher Theile bald als Limma, bald als Apotome, zwei dagegen bald als grossen, bald als kleinen ganzen Ton, u. s. w., gebrauchen kann. Sieben solcher Theile stehen dann an Stelle einer reinen Quinte, fünf an Stelle einer reinen Quarte, u. s. w. Hierdurch ist das ganze Tonsystem in sich abgeschlossen und die Tonarten, die nach der reinen Quintenstimmung

von Quarte zu Quarte, fortschreiten würden, bilden jetzt einen Zirkel, indem man mit der dreizehnten Quinte von *c* aus auf ein *his* kommt, welches in der Tonhöhe genau mit jenem *c* übereinstimmt. Der nach der vollkommenen Consonanz der reinen Quinte fortschreitende Stimmer hat hier also jede Quinte um den zwölften Theil des pythagorischen Kommas zu tief und jede Quarte um eben so viel zu hoch zu stimmen, was in der Praxis natürlich nur ungefähr auszuführen möglich ist.

§ 75.

Diese zwar höchst sinnvolle, aber dennoch willkührliche und nicht die wahre Harmonie gebende Erfindung nennen wir die gleichschwebende Temperatur, welche nur dadurch dem Ohre erträglich wird, dass das letztere selbst nicht vollkommen scharf hört und eine gewisse Unreinheit ertragen kann. Chladni drückt dies in seiner Akustik, Leipzig 1802, pag. 293 folgendermaassen aus: »Ganz kleine Abweichun- »gen von der Genauigkeit der Tonverhältnisse empfindet das Gehör nicht »und man glaubt allemahl bei Anhörung eines Verhältnisses, welches von »einem einfachen nur sehr wenig verschieden ist, das einfachere zu hören. »Hierin liegt der Grund aller Temperatur, und es würde ohne dergleichen »Täuschungen des Gehöres keine Musik existiren können«. Chladni meint hier natürlich nur die Instrumentalmusik, d. h. eine Musik mit unverrückbar feststehenden Tonhöhen.

Hauptsächlich ist die gleichschwebende Temperatur für die Clavierinstrumente, Orgel, Flügel u. s. w. erfunden worden, auf welchen man für sämmtliche zu gebrauchende Tonhöhen besondere Pfeifen oder Saiten nöthig hat, welche man während des Spielens in ihrer Länge weder verkürzen noch verlängern, also in ihrer vor dem Spiele abgestimmten Höhe nicht verändern kann. Die Geigeninstrumente bedürfen zwar auch einer Temperatur, da sie in den blossen Saiten einige feststehende Tonhöhen haben (vergl. § 61) aber nicht in der Ausdehnung wie die Claviere, auf welchen mit der in zwölf gleiche Theile getheilten Octave alle Tonarten mit derselben Reinheit dargestellt werden sollen.

§ 76.

Um das Verhältniss eines solchen gleichschwebend-temperirten halben Tones (d. i. genau den zwölften Theil einer Octave) zu berechnen, verfährt man folgendermaassen: Wenn der Grundton eine Schwingung

(s. §§ 70—72) in Unendlichkeit von Quinte zu Quinte, beziehungsweise macht, so macht der nächst höhere $1 \,.\, x$, der folgende $1 \,.\, x^2$, der dann folgende $1 \,.\, x^3$ u. s. w.; die Octave mithin $1 \,.\, x^{12} = 2$.

Es ist also:

$$12 \,.\, log\, x = log\, 2$$
$$12 \,.\, log\, x = 0{,}3010300$$
$$log\, x = \frac{0{,}3010300}{12} = 0{,}025085$$
$$x = 1{,}059463.$$

Wenn man die Schwingungszahl irgend eines Tones hat, so erhält man die des folgenden, indem man die des ersteren mit 1,059463 multiplicirt. Hiernach berechnet sind die Schwingungszahlen der innerhalb einer Octave befindlichen zwölf Halbtöne folgende:

c (oder *his*)	= 1	
cis oder *des*	= 1,059463..	
d	= 1,122460..	
dis oder *es*	= 1,189206..	
e (oder *fes*)	= 1,259920..	(1,25)
(*eis* oder) *f*	= 1,334839..	(1,333333..)
fis oder *ges*	= 1,414212..	
g	= 1,498306..	(1,5)
gis oder *as*	= 1,587400..	
a	= 1,681790..	
ais oder *b*	= 1,781796..	
h (oder *ces*)	= 1,887746..	
(*his* oder) *c*	= 2.	

Die an der rechten Seite hinzugefügten Zahlen des reinen Verhältnisses der grossen Terz (1,25), der Quarte (1,333333..) und der Quinte (1,5) zeigen, um wie viel die temperirten Intervalle von den natürlichen abweichen. Diese Abweichung ist bei der Terz am grössten, welche auch, da sie weniger consonirend als die Quinte und Quarte ist, eine grössere Unreinheit vertragen kann. Die temperirte Terz ist, wie wir sehen, eine Kleinigkeit grösser als die natürliche. Bei den beiden anderen Consonanzen der Quinte und Quarte ist, wie gesagt, die Abweichung um vieles kleiner. Das Ohr verlangt aber auch für diese Intervalle eine viel grössere Reinheit.

§ 77.

Obgleich es die Absicht vorliegender Abhandlung ist, hauptsächlich die natürlichen Verhältnisse zu besprechen, so wollen wir doch zur Vergleichung der reinen Intervalle mit den temperirten noch auf folgende Verhältnisse der gleichschwebenden Temperatur aufmerksam machen.

Wenn die Octave nach den § 76 gegebenen Zahlen genau in zwölf gleiche Theile getheilt ist, so sind

1. die Quinten (wie bereits angeführt ist) sämmtlich um den zwölften Theil eines pythagorischen Kommas kleiner als die reinen, da der Ueberschuss von zwölf reinen Quinten über die Octave ein solches Komma beträgt, und daraus folgt

2. dass die Quarten sämmtlich um ebenso viel grösser als die reinen sind. Der zwölfte Theil des pythagorischen Kommas beträgt nur ganz wenig mehr als das Schisma.

3. Die falsche Quinte (45 : 64) und der Tritonus (32 : 45) theilen bei natürlicher Stimmung die Octave in zwei Theile in der Weise, dass die falsche Quinte um ein Diaschisma (2025 : 2048 = 1,011358) grösser als der Tritonus ist. Bei der gleichschwebenden Temperatur sind beide Intervalle gleich gross; es ist also der Tritonus um $\frac{1}{2}$ Diaschisma grösser als bei natürlicher Stimmung, und die falsche Quinte um ebenso viel kleiner.

4. Drei grosse Terzen (z. B. *c—e—gis—his*) im Verhältniss 4 : 5 lassen an der Octave die mittlere Diesis (125 : 128 = 1,024) übrig. Folglich ist jede gleichschwebend-temperirte grosse Terz um den dritten Theil dieser mittleren Diesis grösser als die natürliche.

5. Somit sind dann alle gleichschwebend-temperirten kleinen Sexten um $\frac{1}{3}$ der mittleren Diesis kleiner als die natürlichen.

6. Vier kleine Terzen (z. B. *c—es—ges—bb—desdes*) im Verhältniss 5 : 6 sind um den sogenannten Drittelton (625 : 648 = 1,0368) grösser als die Octave. Folglich muss jede gleichschwebend-temperirte kleine Terz gegen die natürliche um den vierten Theil des Dritteltones abwärtsschweben.

7. Somit sind alsdann alle gleichschwebend-temperirten grossen Sexten um $\frac{1}{4}$ des Dritteltones grösser als die natürlichen.

8. Die gleichschwebend-temperirten Ganztöne stehen in ihrer Grösse zwischen den natürlichen grossen (8 : 9) und den natürlichen kleinen (9 : 10), kommen aber den grossen Ganztönen bedeutend näher

als den kleinen. Denn sechs grosse ganze Töne ($8^6 : 9^6$) geben einen Ueberschuss über die Octave von einem pythagorischen Komma; es ist also jeder gleichschwebend-temperirte Ganzton um $\frac{1}{6}$ dieses Kommas kleiner als 8 : 9. — Sechs kleine Ganztöne ($9^6 : 10^6$) sind dagegen beinahe um ein Limma kleiner als die Octave, nämlich um das Verhältniss 500000 : 531441 = 1,062882. Der temperirte Ganzton ist somit beinahe um $\frac{1}{6}$ eines Limma grösser als der kleine Ganzton.

9. Die Grösse des gleichschwebend-temperirten halben Tones im Verhältniss zu den verschiedenen Limmata und Apotomen ist aus der am Schlusse folgenden Intervallen-Tabelle leicht zu ersehen.

§ 78.

Wenn man sich auf mechanische Weise den Klang eines temperirten Intervalles neben einem rein abgestimmten klar machen will, so geschieht dies am besten mit Orgelpfeifen. Man wähle hierzu zwei wo möglich in ihrer Klangfarbe ganz gleich klingende sanfte Register auf zwei Manualen aus. Dieselben sind selbstverständlich vom Orgelbauer gleichschwebend-temperirt abgestimmt. Auf einem dieser Manuale nehme man einen Accord z. B. die Pfeifen *c—e—g*, lasse *c* unverändert, stimme aber *e* und *g* nach diesem *c* so ein, dass die drei Pfeifen die natürliche Grösse der Intervalle 4 : 5 : 6 angeben. Dies erreicht man dadurch, dass man die Terz *e* eine Kleinigkeit erniedrigt und die Quinte *g* ganz wenig erhöht. Nun kann man den gewählten Accord bald auf dem einen Manuale rein, beld auf dem andern gleichschwebend-temperirt anschlagen. Der Unterschied ist ein sehr auffallender und der temperirt abgestimmte Accord gegen den reinen so unangenehm klingend, dass nur Taube und Stumpfsinnige sich der Einsicht verschliessen können, dass die Claviatur in der That nichts weiter als ein Surrogat für die harmonischen Verhältnisse ist und dass es eine unverzeihliche Bequemlichkeit der Lehrer ist, wenn sie den Schülern in der Composition und im Gesange diese Claviatur als die wirkliche Grundlage der Harmonie hinstellen.

§ 79.

Hier dürfte es am Orte sein eine für die praktische Musik nicht unwichtige Bemerkung einzuschieben. Es lässt sich nämlich gar nicht vermeiden und geschieht selbst in Gesangvereinen, die den richtigsten Grundsätzen der Gesangskunst huldigen, wie z. B. in der Berliner Sing-Akademie, dass man bei der Einübung von Chorgesängen, nament-

lich von grösseren mit Orchesterbegleitung geschriebenen Werken, das Pianoforte zu Hülfe nimmt, d. h. also, dass man den Gesang der Sänger, welche, wenn sie gute musikalische Ohren besitzen, fortwährend die harmonischen Verhältnisse auszugleichen bemüht sind, mit einem feststehend- und gleichschwebend-temperirt gestimmten Instrumente begleitet. Dies ist in der That ein grosser Uebelstand, der nur dadurch einigermassen unschädlich gemacht werden kann, dass der Dirigent selbst niemals die eigentlichen Verhältnisse der Harmonie über die temperirten des Clavieres ausser Acht lässt. Auch vom Clavier aus muss er auf die Reinheit der Consonanzen achten und ferner in den Singenden immer die Vorstellung zu erhalten oder zu erwecken suchen, als sei der diatonische Halbton (das Limma) um ein Beträchtliches grösser als die Hälfte des ganzen Tones. Dagegen muss er umgekehrt bei dem chromatischen Halbton, bei der Apotome, dieses Intervall klein nehmen lassen. — Diese Andeutung schien mir insofern nicht unnöthig, als man heutzutage unter den Instrumentalmusikern fast immer die entgegengesetzte Meinung findet. Sie haben fast alle ohne Ausnahme die Neigung die grosse Terz zu gross zu nehmen und verlangen in Folge dessen, dass man *fis* höher als *ges*, *cis* höher als *des* u. s. w. setze. Nimmt man aber die Terz zu gross, so wird das Limma zu klein. Ein Chordirigent, der mit so verkehrten Ansichten und Vorstellungen seinen Sängern gegenübertritt, wird niemals mit ihnen etwas gutes zu leisten im Stande sein. Der weiche fügsame Ton der menschlichen Stimme erträgt die scharfe Intonation der Terzen nicht, die Sänger nehmen sie unwillkührlich etwas tiefer. Da sie nun aber nicht angehalten werden, das Limma in der gehörigen Grösse abzumessen, so ist die Folge davon, dass der Chor immer eine Neigung zum Sinken hat.

§ 80.

Dass ein Chor, der nach den richtigen Grundsätzen im Gesange ohne jede Instrumental-Hülfe geübt wird und (was sich wohl von selbst versteht) aus musikalisch gut beanlagten Sängern zusammengesetzt ist, weit davon entfernt ist, gleichschwebend-temperirt zu singen, ist mir vor sechszehn oder siebzehn Jahren einmal besonders aufgefallen. Es war, wenn ich mich nicht irre, im Jahre 1856, als ein beim Preussischen Hofe wohlangesehener Russischer Kapellmeister nach Berlin kam, der ein *Stabat mater* für Chor- und Orchesterbegleitung geschrieben hatte.

König FRIEDRICH WILHELM IV. wollte das Werk hören und NEITHARDT erhielt Auftrag, die Gesangpartie dem damals durch seine vollendeten Leistungen einzig dastehenden Domchore einzustudiren. NEITHARDT führte diesen Auftrag mit der grössten Gewissenhaftigkeit aus. Ich selbst habe damals fast allen Chor-Uebungen beigewohnt, in denen ich stets das feine Ohr NEITHARDT's und seine Sicherheit auch in den schwierigsten Fällen bewundern musste. Zur Orchesterbegleitung wurde die Königliche Kapelle des Opernhauses unter WILHELM TAUBERT's bewährter Direction befohlen. Als darauf aber die beiden in jeder Beziehung tüchtigen Institute zusammen wirken sollten, klang die ganze Musik unrein und namentlich waren es die noch durch keine Instrumental-Musik verdorbenen Knabenstimmen, welche sich nicht der von den wahren harmonischen Verhältnissen abweichenden Intonation der Violinen fügen wollten. Und diese Differenz glich sich durchaus nicht sofort aus: auch die Aufführung war trotz vielen vorangegangenen Scheltens und Zurechtweisens von Seiten NEITHARDT's unsicher und schwankend in der Intonation. Die Schuld lag allein an NEITHARDT., der es dem Könige gegenüber nicht wagte, eine Verbindung seines A capella-Chores mit Instrumentenspielern von vornherein abzulehnen; auch reichten seine theoretischen Kenntnisse wohl nicht aus, eine solche Ablehnung durch eine gründliche Auseinandersetzung der Verhältnisse zu rechtfertigen.

Ungleichschwebende Temperaturen.

§ 81.

Da es sehr schwierig ist und eine lang andauernde Uebung des Gehöres erfordert, Quinten in der Weise abzustimmen, dass sie genau um den zwölften Theil eines pythagorischen Kommas abwärtsschweben, so haben im vorigen Jahrhundert manche Theoretiker (ich nenne hier nur KIRNBERGER) eine sogenannte ungleichschwebende Temperatur vorgeschlagen, in welcher eine gewisse Anzahl Quinten ganz rein wie 2 : 3 andere dagegen selbstverständlich desto unreiner gestimmt werden sollen. (Vergl. KIRNBERGER's Kunst des reinen Satzes, Berlin und Königsberg, Theil I, 1774, pag. 14, auch die Allgem. Musikal. Zeitung vom J. 1871, Nr. 36.) — Es lässt sich aber leicht einsehn, dass hierdurch viel unerträglichere Unreinheiten entstehen, als jene sind, welche wir durch die gleichschwebende Temperatur bekommen, auch wenn wir dieselbe nur mangelhaft gleichschwebend abzustimmen im Stande sind.

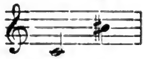
Von *c* aus giebt bekanntlich schon die dritte Quinte (*c—g—d—a*) eine unreine Sexte, 16 : 27 statt 3 : 5, und die vierte Quinte bringt uns die pythagorische grosse Terz 64 : 81, statt der natürlichen 4 : 5. Diese Verhältnisse liess aber Kirnberger alle zur Bequemlichkeit des Stimmers gelten. — Von den verschiedenen Temperaturen ist daher die gleichschwebende die allein mögliche und brauchbare, wenn man, wie auf dem Clavier und der Orgel, eine feststehende Temperatur nöthig hat und in allen Tonarten spielen will.

Doppelte und mehrfache Claviaturen.

§ 82.

Physiker, welche der musikalischen Praxis ferner stehen, haben zur Herstellung reiner Intervalle und reiner Accorde (namentlich der Drei-Klänge) doppelte Claviaturen vorgeschlagen. So liessen sich z. B. zwei Manuale einer Orgel vereinigen, von denen jedes nach reinen Quinten (2 : 3) gestimmt würde, von denen das eine aber um ein syntonisches Komma (80 : 81) höher als das andere stände. Machen wir uns dies durch ein Notenbeispiel klar:

Die obere mit weissen oder halben Noten geschriebene Reihe soll die Claves eines nach reinen Quinten aufwärts oder reinen Quarten abwärts gestimmten Manuales vorstellen; die Reihe darunter giebt dieselben Verhältnisse, steht aber um ein syntonisches Komma niedriger. Dies wäre auf den ersten Anblick eine leidlich gute Erfindung, denn man kann gewisse Dur- und Moll-Dreiklänge in vollkommenster Reinheit greifen. Die Quinte greift man nämlich in den Durdreiklängen auf der oberen mit weissen Noten geschriebenen Claviatur und die Terz dazu auf der unteren, z. B. $c \underset{e}{\text{—}} g$, $cis \underset{eis}{\text{—}} gis$, $d \underset{fis}{\text{—}} a$, in den Molldreiklängen ist es umgekehrt, $e \overset{g}{\text{—}} h$, $dis \overset{fis}{\text{—}} ais$, u. s. w. Unmöglich ist jedoch die Darstellung derjenigen Accorde, welche wir gewöhnlich als *B*-Tonarten zu schreiben pflegen, z. B. *Dis*-Dur oder *Es*-dur. In diesem

Accorde müsste man *Dis—ais* auf dem oberen Manuale und hierzu *g* auf dem unteren greifen *dis* $\underset{g}{\text{—}}$ *ais*. — Dieses *g* würde aber um ein Schisma (die Differenz des pythagorischen und syntonischen Kommas) höher stehen als die eigentliche Terz von *dis*. Wenn nun auch das genannte Intervall verschwindend klein ist (1,001192) und jene Terz dem Gehöre im Zusammenklange vollkommen genügen würde, so geben beide Claviaturen aber nimmermehr ein wirkliches Tonsystem, welches in der Octave seinen Abschluss und seine nothwendige Wiederholung findet. Auf die Octave muss man sogar gänzlich verzichten, wenn man nicht etwa dieses Intervall  = (1 : 2) + (32768 : 32805) = 16384 : 32805 = 2,002259 als Octave gelten lassen will.

§ 83.

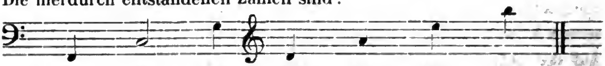
Auf ähnliche Weise hat der berühmte Physiologe H. Helmholtz eine Phys-Harmonica einstimmen lassen, auf welcher, (wie man in seinem Werke über die Lehre von den Tonempfindungen, Braunschweig 1863, pag. 484 u. f. nachlesen kann,) in höchst geschickter und thatsächlich geistreicher Weise der Uebelstand versteckt wird. Das Resultat bei Helmholtz ist, dass er zwar eine Anordnung der Claves findet, durch welche lauter reine Terzen hergestellt werden, wogegen wir aber Quinten, die um ein Schisma zu gross sind, hinnehmen müssen. Um also alle jene Abweichungen, welche die Sänger durch ihr richtiges Ohr von selbst und oft unbewusst ausführen, durch mechanische Mittel herzustellen, würde mindestens ein Dutzend Claviaturen gehören und doch würde hierdurch nichts für die Kunst erspriessliches erreicht werden. Solche Instrumente sind vortreffliche physikalische Apparate beim Unterricht in der Akustik, aber keine Organe der Kunst. Das einzige und edelste Organ der Musik ist und bleibt die menschliche Stimme im engsten Zusammenhange mit dem richtig gebildeten Ohre.

Die akustischen Verhältnisse der diatonischen Tonleiter bei den Alten.

§ 84.

Die Griechen, deren musikalisches System ebenfalls auf den Verhältnissen der diatonischen Tonleiter beruhte, liessen bei der Berechnung derselben das Verhältniss der grossen Terz 4 : 5 und somit auch den

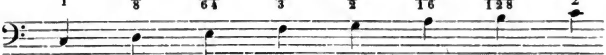
natürlichen Durdreiklang gänzlich ausser Acht und bestimmten alle Töne nur durch das Verhältniss der Quinte 2 : 3 oder durch die Umkehrung dieses Intervalles, die Quarte 3:4. Wenn sie, um ein Beispiel zu geben, *c* als Grundton annahmen, so fügten sie diesem zunächst die tiefere Quinte *f* hinzu, dann die höhere Quinte *g*, dem *g* die Quinte *d*, diesem die Quinte *a*, diesem die Quinte *e* und schliesslich diesem die Quinte *h*. Die hierdurch entstandenen Zahlen sind:



64 : 96 : 144 : 216 : 324 : 486 : 729.

Um lauter ganze Zahlen zu bekommen, habe ich für *c* die Zahl 96 angesetzt. Behalten wir für *h* die Zahl 729 bei und transponiren wir die gefundenen Töne in den Umfang einer Octave, so erhalten wir:

$1 \quad \frac{9}{8} \quad \frac{81}{64} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{27}{16} \quad \frac{243}{128} \quad 2$



$\underbrace{384 : 432}_{8\,:\,9,} : \underbrace{486}_{243\,:\,256,} : \underbrace{512}_{8\,:\,9,} : \underbrace{576}_{8\,:\,9,} : \underbrace{648}_{8\,:\,9,} . \underbrace{729}_{243\,:\,256.} : 768$

8 : 9, 8 : 9, 243 : 256, 8 : 9, 8 : 9, 8 : 9, 243 : 256.

Die Zahlen über den Noten geben das Verhältniss zum Grundton *c*, die unteren das Verhältniss zweier neben einander stehender Tonstufen an.

§ 85.

Die so entstandene oder berechnete Tonreihe ist, was die Lage der halben und ganzen Töne anbetrifft, vollkommen übereinstimmend mit unsrer modernen diatonischen Tonleiter, sie weicht aber in der Grösse der Zahlenverhältnisse bedeutend von ihr ab. Ein scheinbarer Vorzug der alten besteht darin, dass sie lauter reine Quinten und Quarten hat; ferner dass alle ganzen Töne in ihr grosse ganze Töne von gleicher Grösse sind. Durch letzteren Umstand wird aber die grosse Terz, die sich bei uns Modernen wie 4 : 5 verhält und aus einem grossen und einem kleinen ganzen Tone besteht, um das syntonische Komma 80 : 81 zu gross und steht in dem sehr complicirten Verhältnisse 64 : 81. Ferner stehen die kleinen Terzen sämmtlich in dem Verhältniss 27 : 32, welches wir bei der modernen Berechnung als harmonisch unfassbar erklären mussten. Die Dreiklänge lassen sich nur durch folgende grössere Zahlen ausdrücken:

Dur, *c* — *e* — *g*,
64 : 81 : 96,
Moll, *c* — *es* — *g*,
54 : 64 : 81.

§ 86.

Am complicirtesten ist jedoch das Verhältniss des halben Tones oder Limma's, welches sich nicht anders als durch 243 : 256 ausdrücken lässt. Dasselbe ist um ein syntonisches Komma kleiner als das moderne Limma.

Modernes Limma	15 : 16	= 1,066666
Pythagor. oder griech. Limma	243 : 256	= 1,053498
Differenz das synton. Komma	80 : 81	= 1,0125.

Aus der Grösse des Limmas ergiebt sich die Apotome, welche wir dadurch erhalten, dass wir das Limma vom ganzen Tone abziehen.

Ganzer Ton	8 : 9	= 1,125
Pythagorisches Limma	243 : 256	= 1,053498
Differenz die griech. Apotome	2048 : 2187	= 1,067871.

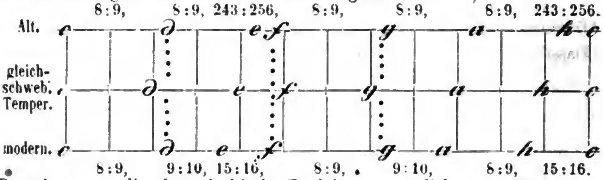
Da bei den Alten die Apotome grösser als das Limma ist, so ist bei ihnen auch umgekehrt als bei uns *cis* höher als *des*, *fis* höher als *ges* u.s.w. — Den Unterschied zwischen Apotome und Limma nennen die Alten das pythagorische oder ditonische Komma, jenes Intervall, welches wir bereits als die Differenz der zwölften Quinte und der Octave kennen gelernt haben:

Pythagorische Apotome	2048 : 2187	= 1,067871
Pythagorisches Limma	243 : 256	= 1,053498
Ditonisches oder pythag. Komma	524288 : 531441	= 1,013643.

§ 87.

Die hier angegebenen Zahlenverhältnisse mögen genügen, um den Unterschied zwischen unserer heutigen und der antiken Scala erkennen zu lassen. Vergleichen wir in beiden die Verhältnisse von dem von uns als Grundton aufgestellten Tone *c* aus, so zeigt sich, dass dieser Ton mit seiner Octave, ferner auch mit seiner Quinte *g* und seiner Quarte *f* in beiden Tonleitern in demselben Verhältniss steht, ausserdem noch mit der Secunde *d*. Alle anderen Intervalle weichen indessen von einander ab. Da in der antiken Tonleiter alle ganzen Töne grosse ganze Töne sind, so wird natürlich (wie wir § 85 gesehen haben) die Terz zu gross und das daneben stehende Limma *e–f* um ein bedeutendes zu klein. Der Schritt *f–g* ist wieder in beiden gleich; dagegen liegen die zwei folgenden Stufen *a* und *h* in der antiken Scala ein beträchtliches zu hoch. Die nach der gleichschwebenden Temperatur gebildete Tonleiter steht

daher gerade in der Mitte zwischen der alten und der modernen, wie auf der beifolgenden bildlichen Darstellung zu sehen ist*):



Das also, was die alte griechische Tonleiter wesentlich von unserer modernen unterscheidet, ist das gänzliche Ausserachtlassen und Nichtkennen der consonirenden grossen und kleinen Terz und somit auch des Dreiklanges, welchen wir als die Grundlage aller symphonischen Harmonie ansehen. Die alten Theoretiker stellen daher nur die Octave, die Quinte und die Quarte als Consonanzen auf und dies ist gewissermassen ein Analogon zu unserer modernen Eintheilung. Denn wir haben § 26 gesehen, dass die moderne Musik als Grundlage der Berechnung der diatonischen Verhältnisse den Durdreiklang angenommen hat. Daher gelten bei uns alle in einem Dreiklange und seinen Umkehrungen und Versetzungen enthaltenen Intervalle als Consonanzen, und die Dissonanzen entstehen erst durch die Combination der drei Dreiklänge auf *c*, *f* und *g* zur Tonleiter, wodurch (wie § 33 gezeigt wurde) eine unverrückbare Gränze zwischen Consonanzen und Dissonanzen gezogen ist. Ganz analog verfuhren die Alten. Sie nahmen als Grundintervalle die Octave, Quinte und Quarte an und berechneten aus diesen die übrigen Intervalle der ganzen Leiter. Daher galten bei ihnen auch nur diese drei Intervalle als Consonanzen und schon die grosse Terz war bei ihnen ein *mittelbar* gefundenes Intervall und folglich *Dissonanz*. Freilich aber, dass ihnen die Terz trotz ihres einfachen, natürlichen Zahlenverhältnisses noch den Eindruck des mittelbar gefundenen Intervalles machte, das ist uns ein sicheres Zeichen, dass sie das Bedürfniss eine mehrstimmige Musik zu machen nicht kannten und dass für ihre künstlerischen Zwecke die einstimmige Musik genügte**).

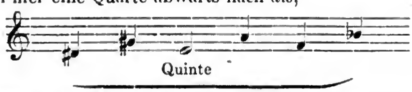
*) Die graphische Darstellung der Verhältnisse dieser drei Scalen lässt sich auf das genaueste nach dem Anhange § 94 darstellen, worauf wir den Leser verweisen müssen. Hier im Buchdruck ist nur eine *ungefähre* Wiedergabe der Verhältnisse möglich.

**) Vergl. Friedrich Bellermann, Die Tonleitern und Musiknoten der Griechen, Berlin 1847, pag. 20 u. ff.

§ 88.

Wir wollen hier nicht unerwähnt lassen, dass den Alten bereits die gleichschwebend-temperirte Stimmung wohl bekannt war, wenn uns auch die Nachrichten fehlen, wie weit sie dieselbe berechnet haben. Theoretisch sind über diesen Punkt die Anhänger des Pythagoras, welcher der erste Berechner der akustischen Zahlenverhältnisse ist, mit den Schülern des Aristoxenus im Streit. Die Pythagoreer halten an den von ihrem Meister gefundenen Zahlen fest und bestimmen die Intervalle nach den Verhältnissen der Saitenlängen, oder wie wir sagen würden, nach den Verhältnissen der Schwingungszahlen. Ihnen besteht daher die Quarte aus zwei Ganztönen und einem Limma, welches weniger als ein halber Ton ist; die Quinte aus drei ganzen Tönen und einem solchen Limma. Folglich besteht bei ihnen die Octave aus etwas weniger als sechs Ganztönen, denn, wie wir § 72 gesehen haben, machen zwei Limmata noch keinen ganzen Ton aus, sondern es bleibt das pythagorische Komma übrig. Zwei Limmata betragen 59049 : 65536 (= 1,109858). Zieht man dieses Intervall vom Ganzton 8 : 9 ab, so erhält man das bekannte Verhältniss des pythagorischen Kommas, 524288 : 531441 = 1,013643.

Aristoxenus nimmt dagegen auf diese Zahlenverhältnisse gar keine Rücksicht; er theilt das durch das Gehör gefundene Intervall der Octave in sechs gleiche Theile, die er ganze Töne nennt und jeden Ganzton in zwei gleiche halbe Töne, d. h. er erkennt nur die gleichschwebende Temperatur an. Daher besteht bei ihm die Quarte genau aus zwei und einem halben Ganzton, die Quinte aus drei und einem halben Ganzton u. s. w. Die Richtigkeit seiner Behauptungen beweist er dadurch, dass er auf folgende Weise eine Quinte abstimmt: Von dem Ton *e* ausgehend stimmt er von diesem die Quarte *a* ab, dann von hier aus die grosse Terz abwärts *f* und dann von *f* die Quarte aufwärts *b*. Hierauf geht er zu dem Ausgangspunct *e* zurück, stimmt eine grosse Terz aufwärts nach *gis* und von hier eine Quarte abwärts nach *dis*,



und von diesem *dis* behauptet er, dass es mit dem *b* (wie die Figur zeigt) eine reine Quinte bilde *).

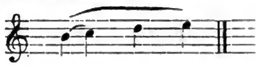
*) Friedr. Bellermann a. a. O. pag. 22.

Beiläufige Bemerkungen über die Klanggeschlechter und Chroai der Alten.

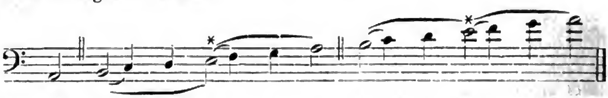
§ 89.

Wir haben § 84 gesehen, dass die Grundlage der Musik bei den Alten wie bei uns Modernen die diatonische Tonleiter bildete, deren Intervallengrössen allerdings von jenen in anderer Weise berechnet wurden und hierdurch zum Theil von den unsrigen abweichend erscheinen. Dies können wir jedoch als keinen wesentlichen oder thatsächlichen Unterschied gelten lassen, sondern es ist nur eine Folge der noch unvollkommenen Kenntnisse der Alten in akustischen Dingen.

In der praktischen Musik knüpften die Alten um vollständige Tonleitern zu bilden an die Consonanz der Quarte, die kleinste vollkommene Consonanz an, welche sie zunächst diatonisch von unten nach oben als aus Halbton, Ganzton, Ganzton bestehend annahmen.


oder


Diese so gestaltete Quarte nannten sie die dorische Quarte, und legten sie ihren durch zwei Octaven gehenden Molltonleitern zu Grunde, und zwar in folgender Weise:



Wir sehen hier zwei getrennte Paare verbundener Tetrachorde:

hc — d — $\overset{*}{e}$*f — g — a.*

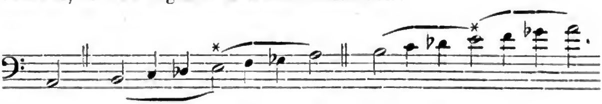
Dieselben hiessen verbunden, weil die in der Mitte stehende Tonstufe, nämlich *e*, beiden Tetrachorden gemeinschaftlich angehört, sie ist hier und in der darüberstehenden Notenreihe durch ein Sternchen (*) hervorgehoben. Eine solche zwei dorischen Tetrachorden gemeinschaftlich angehörende Stufe nannten die Alten die Bindung (*συναφή*), während man das Ganzton-Intervall zwischen *A* und *H* und ebenso das in der Mitte zwischen *a* und *h* (oben durch || bezeichnet), welches zwei auf einander folgende Tetrachorde von einander trennt, die Trennung (*διάζευξις*) oder den Trennungs-Ganzton (*τόνος διαζευκτικός*) nannte. Ich fasse mich hier so kurz als möglich, da ich den Bau der griechischen Scala bei meinen Lesern wohl voraussetzen kann*).

*) Wir verweisen hier auf die bereits angeführte Schrift Fr. Bellermann's, Die Tonleitern und Musiknoten der Griechen, Berlin 1847.

In der oben notirten Leiter habe ich die Gränztöne der Tetrachorde mit halben Noten geschrieben, die dazwischen liegenden Stufen dagegen als Viertelnoten. Jene als halbe Noten geschriebenen nannten die Alten die feststehenden Töne (*φθόγγοι ἑστῶτες*), die dazwischen liegenden dagegen die beweglichen, (*κινούμενοι*). Mit diesen letzteren verbanden sie die eigenthümliche Vorstellung, dass man die Tonhöhe derselben in mehrfacher Weise willkührlich ändern, namentlich herabstimmen könne, ohne dass dadurch unharmonische Verhältnisse entstünden.

Die oben angegebene Form der Leiter, nach welcher das Tetrachord aus Halbton, Ganzton, Ganzton besteht, nannten sie das diatonische Klanggeschlecht.

Setzten sie den dritten Tetrachordton aber um einen halben Ton abwärts, so dass folgende Intervalle entstanden:



so nannten sie diese Anordnung das chromatische Geschlecht.

Und rückten sie endlich die Mittelstufen oder *κινούμενοι* so eng an den tiefsten Tetrachordton heran, dass am unteren Ende zwei Vierteltöne entstanden, was wir durch moderne Noten mit Hülfe eines *δ* (*δίεσις* = Viertelton) bezeichnen wollen:

so hatten sie das enharmonische Geschlecht.

In welcher Weise diese beiden letzten Geschlechter, (das chromatische und enharmonische) musikalisch benutzt wurden, hat bis jetzt noch nicht ermittelt werden können, da die überlieferten Melodien aus dem Alterthum nur dem diatonischen Klanggeschlecht angehören und die blossen Erklärungen der Theoretiker nicht genügend sind. Dass man aber nach den Verhältnissen dieser Geschlechter mit Ausschluss der diatonischen Stufen nicht singen kann, versteht sich wohl von selbst, wenn auch Philologen das Gegentheil behaupten und die Vierteltöne der Enharmonik als einen Beweis anführen wollen, dass die Alten in musikalischer Beziehung viel feiner als wir Modernen angelegt gewesen seien. Das Letztere wird jeder gern zugeben; wir glauben aber, dass

die Griechen gerade, weil sie musikalisch so hoch und vielleicht besser als wir Modernen begabt waren, in den beiden Klanggeschlechtern den nicht wegzuläugnenden Mangel einer innern Beziehung der Tonstufen zu einander durch Consonanzen auf das tiefste und unangenehmste empfunden hätten, wenn sie eine Musik in den von den Theoretikern beschriebenen Verhältnissen hätten anhören oder gar singen sollen. Musikalisch richtig fühlende Menschen können daher nur annehmen, dass uns in den eigenthümlichen Gestalten des chromatischen und enharmonischen Geschlechtes gewisse Modulationsformeln überliefert sind, deren Verständniss zwar leider jetzt noch verborgen ist, welches sich aber wohl durch eingehende Studien mit der Zeit erschliessen kann, zumal in Bezug auf das enharmonische Geschlecht, denn auch die moderne Enharmonik benutzt Intervalle, welche kleiner als die *Apotome minor* (24 : 25) sind und ungefähr die Grösse des Vierteltones haben; dieselben kommen allerdings nicht als selbstständige Melodienschritte in Anwendung, müssen aber in einer reinen Musik dennoch von den einzelnen Stimmen mit Bewusstsein an solchen Stellen ausgeführt werden, welche man eine harmonische oder enharmonische Rückung nennt. Und wir haben § 56 u. 67 gesehen, dass man diese kleineren hier in Betracht kommenden Intervalle, nämlich:

$$625 : 648 = 1{,}0368$$
$$243 : 250 = 1{,}028806$$
$$125 : 128 = 1{,}024 \text{ u. s. w.}$$

sehr wohl ihrer Grösse nach Vierteltöne nennen könnte.

§ 90.

Die alten Theoretiker gehen nun noch weiter in der Verschiebung der *φθόγγοι κινούμενοι* und stellen für jedes Klanggeschlecht wieder Unterabtheilungen (*χρόαι*, Färbungen, Schattirungen) auf. So finden sich Anordnungen von diatonischen Tetrachorden mit auffallend grossen ganzen Tönen (7 : 8 und 8 : 9) und einem ganz winzigen Limma (27:28). Dann giebt es andere mit merkwürdig kleinen ganzen Tönen, nämlich

9 : 10 und 10 : 11, so dass das Limma dann die Grösse von 11 : 12 bekommen muss u. s. w. Alle diese *χρόαι* erscheinen als Theilungen der Quarte 3 : 4 und zwar in Rücksicht auf ihre ursprüngliche dorische Form; zur Vervollständigung des ganzen Systemes ist dann jedesmal noch die *διάζευξις* nöthig, die aber stets in dem Verhältniss 8 : 9 bleibt, denn soviel beträgt der Rest, den zwei Quarten von der Octave übrig lassen. Diese *χρόαι* sind musikalisch ganz werthlos und nur aus den Spielereien der Mathematiker hervorgegangen, welche ein Wohlgefallen an scheinbar regelmässigen Zahlenreihen fanden*). Wir wollen hier drei diatonische *χρόαι* in der Kürze durchgehen, um zu zeigen, welch unerträglich unharmonische und widersinnige Verhältnisse in ihnen enthalten sind.

1. Das *τονιαῖον* oder *ἔντονον διάτονον γένος* (das tonische diatonische Geschlecht) ist nach Ptolemaeus und Archytas folgendermaassen beschaffen gewesen:

e — f — g — a

$$\underbrace{27:28,\ 7:8,\ 8:9}_{3\ :\ 4.}$$

Um alle im ganzen Systeme enthaltenen Intervalle übersehen zu können, verlängern wir die Verhältnisse bis zu zwei vollen Octaven:

8 : 9 * 8 : 9 *

A ‖ *H* *C* *D* *E* *F* *G* *a* ‖ *h* *c* *d* *e* *f* *g* *a*

διάζευξις. 27:28, 7:8, 8:9, 27:28, 7:8, 8:9. *διάζ.* 27:28, 7:8, 8:9, 27:28, 7:8, 8:9.

a) Die Quinten sind mit Ausnahme der Quinte *c—g* alle rein, diese verhält sich jedoch wie 21 : 32, ist also um 63 : 64 zu gross.

---

*) Eine vollständige Zusammenstellung dieser Färbungen in allen drei Klanggeschlechtern findet man in *Anonymi scriptio de musica primum edidit* Fr. Bellermann, Berlin 1841, pag. 69. Unter denselben sehen wir neben höchst seltsamen Tetrachordeintheilungen das diatonische Geschlecht von Didymus so 15 : 16, 9 : 10, 8 : 9, und von Ptolemaeus so 15 : 16, 8 : 9, 9 : 10 berechnet, also übereinstimmend mit den aus der richtigen modernen Berechnung hervorgegangenen Verhältnissen. Auf diese Zahlen sind die Alten jedoch nur aus Zufall gekommen, indem sie willkührlich den Grundsatz aufstellten, dass in einem Tonsystem die neben einander liegenden Tonstufen durch zwei in der natürlichen Zahlenreihe neben einander stehende Zahlen ausgedrückt werden müssten, wobei sie als Ausnahme nur das alte pythagorische Verhältniss des *λεῖμμα* 243 : 256 gelten liessen. Ptolemaeus tadelt z. B. den Archytas wegen der folgenden chromatischen Eintheilung 27 : 28, 224 : 243, 27 : 32, die sicherlich nicht weniger sinnvoll wie 11 : 12, 10 : 11, 9 : 10 und viele andere ist.

b) Von den Quarten ist $g - c$ unrein $= 16 : 21$.

c) Die grossen Terzen sind ungleich,

$$\left.\begin{matrix} f - a \\ c - e \end{matrix}\right\} = 7 : 9,$$

das ist ein Intervall, welches um das Verhältniss $35 : 36$ grösser als die reine grosse Terz $4 : 5$ und um $63 : 64$ grösser als die pythagorische grosse Terz, ist. Dagegen verhält sich

$$g - h = 64 : 81.$$

d) Von den kleinen Terzen verhalten sich

$$\left.\begin{matrix} e - g \\ h - d \end{matrix}\right\} = 27 : 32,$$

$$\left.\begin{matrix} a - c \\ d - f \end{matrix}\right\} = 6 : 7.$$

e) Die Theilung der Octave $F - f$ in Tritonus und falsche oder verminderte Quinte giebt folgende Zahlen:

$$\begin{matrix} F & - & h & - & f \\ 56 & : & 81 & : & 112. \end{matrix}$$

2. Das *μαλακὸν διάτονον γένος* (das weiche diatonische Geschlecht) hat nach Ptolemaeus folgende Verhältnisse:

$$\begin{matrix} e - f - g - a \\ 20 : 21,\ 9 : 10,\ 7 : 8. \end{matrix}$$

Hier erhalten wir ebenfalls zweierlei grosse Terzen, zweierlei kleine u.s.w. in ähnlich verschrobenen Zahlen und zwei unreine Quinten, $c - g = 27 : 40$ und $d - a = 21 : 32$. Ich führe dies nicht näher aus, sondern gehe gleich zu dem

3. gleichmässig diatonischen Geschlecht (*ὁμαλὸν διάτονον γένος*) des Ptolemaeus über. In diesem haben wir, wie in dem unter Nr. 2 angeführten, die *διάζευξις* mit eingerechnet dreierlei verschiedene Ganztöne, was noch unvortheilhafter auf die Consonanzen einwirkt.

$$\begin{array}{l}
8:9 \quad\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{}\ast\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{}\ 8:9 \quad\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{}\ast\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{} \\
A \,\|\, H \quad C \quad D \quad E \quad F \quad G \quad a \,\|\, h \quad c \quad d \quad e \quad f \quad g \quad a \\
\text{διάζ.}\ 11:12,\ 10:11,\ 9:10,\ 11:12,\ 10:11,\ 9:10.\ \text{διάζ.}\ 11:12,\ 10:11,\ 9:10,\ 11:12,\ 10:11,\ 9:10.
\end{array}$$

a) Von den Quinten sind $= 2 : 3$ $e-h$, $f-c$, $g-d$ und $a-e$; dagegen unrein und von verschiedener Grösse folgende zwei:

$$c - g = 15 : 22,$$
$$d - a = 27 : 40,$$

bei den Quarten ist es umgekehrt.

b) Die grossen Terzen verhalten sich

$$\left.\begin{array}{l} c - e \\ f - a \end{array}\right\} = 9 : 11.$$

$$g - h = 4 : 5.$$

c) Die kleinen Terzen:

$$\left.\begin{array}{l} h - d \\ e - g \end{array}\right\} = 5 : 6$$

$$d - f = 33 : 40$$

$$a - c = 22 : 27.$$

Die hier dargelegten Verhältnisse mögen zur Beurtheilung des musikalischen Werthes der χρόαι genügen. Der Fehler der alten mathematischen Musiker bestand darin, dass sie durch die Theilung einer Consonanz in kleinere Intervalle eine musikalisch brauchbare Tonfolge zu erhalten wähnten, während (wie wir bereits zu Anfang dieses § sagten und wie hoffentlich aus unserer ganzen Darstellung hervorgeht) eine solche nur aus einer Combination von Consonanzen entsteht. So combinirt die moderne Musik die drei Dur-Dreiklänge zu einer Scala:

$$\overbrace{f - a - c}^{2:3} - \overbrace{c - e - g}^{2:3} - \overbrace{g - h - d}^{2:3}$$

$$\underbrace{f - a - c}_{4:5:6},\quad \underbrace{c - e - g}_{4:5:6},\quad \underbrace{g - h - d}_{4:5:6}$$

die alte dagegen lauter reine Quinten,

$$f - c - g - d - a - e - h$$
$$2{:}3,\ 2{:}3,\ 2{:}3,\ 2{:}3,\ 2{:}3,\ 2{:}3$$

und man kann sagen, dass die moderne Musik bis zu einem gewissen Grade auch die alte Quintenfolge gleichzeitig neben der Dreiklangs-Combination benutzt, indem wir den Ton *a* eben so häufig als dritte Quinte von *c*, wie als reine Terz von *f* auffassen müssen u. s. w.

Wie steht es aber in dieser Beziehung mit den χρόαι der Alten? Hier ist der Zusammenhang der Verhältnisse auf mannigfache Weise willkührlich unterbrochen, wie man an den Quinten des ὁμαλὸν διάτονον γένος besonders deutlich sehen kann:

$$f - c \overset{*}{-} g - d \overset{*}{-} a - e \overset{*}{-} h$$

$$2 : \underbrace{3,\quad 2}_{15\,:\,22,} : \underbrace{3,\quad 2}_{27\,:\,40,} : 3,\ 2 : 3.$$

denn weshalb sich hier in der fortlaufenden Quintenfolge die beiden Verhältnisse 15 : 22 und 27 : 40 eingeschlichen haben, ist durchaus

unergründlich. Bei Feststellung der Grundtöne der Tonarten sagt Ptolemaeus Buch 2, Cap. 11, sehr richtig: »Aber man muss nicht die Con»sonanz aus den Melodien entnehmen, sondern im Gegentheil aus jenen »diese; denn die Consonanzen sind leichter zu fassen und wichtiger, »sowohl in Bezug auf alles andere als auf die Modulation«. Hiermit stehen aber seine eigenen *χρόαι* in vollem Widerspruch.

§ 91.

Den Höhepunct von unsinnigen Intervallen- und Tetrachord-Zusammenstellungen sehen wir aber in den sogenannten Mischungen oder *μίγματα* beim Ptolemaeus, in denen die Octave aus zwei Tetrachorden von verschiedener Färbung zusammengesetzt ist. Es möge zum Schluss hier das *μῖγμα τοῦ τονιαίου διατόνου* ($\frac{28}{27}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{9}{8}$) *καὶ τοῦ συντόνου διατόνου* ($\frac{16}{15}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{10}{9}$) Platz finden, in welchem mit Ausnahme der Octaven fast alle Consonanzen verschwunden sind:

$$\begin{array}{c} 8:9 \\ e - f - g - a \quad \| \quad h - c - d - e \\ 27:28,\ 7:8,\ 8:9\ \textit{διάζευξις}\ 15:16,\ 8:9,\ 9:10. \end{array}$$

Diese Mischung enthält nur noch zwei reine Quinten = 2 : 3, nämlich *e–h* und *a–e*, und demgemäss nur zwei reine Quarten = 3 : 4, *h–e* und *e–a*. Alle anderen sind unrein:

$$\underbrace{f - c}_{35:54,}\ \underbrace{- g}_{27:40,}\ \underbrace{- d}_{160:243,}\ \underbrace{- a}_{27:40,}\ \underbrace{- e}_{2:3,}\ \underbrace{- h}_{2:3.}$$

Die reinen Intervalle werden hier nur noch durch die von Anfang an als unveränderlich angenommenen *φθόγγοι ἑστῶτες* gebildet, während die *κινούμενοι* dergestalt verschoben sind, dass sie in ganz unharmonischen Verhältnissen zu einander stehen*).

Das Mittelalter.

§ 92.

Die mittelalterlichen Musiker nahmen das Tonsystem des Alterthums

---

*) Vergl. Rudolf Westphal's Metrik der Griechen im Verein mit den übrigen musischen Künsten, Leipzig 1867, pag. 436. Westphal hält eine Musik in diesen Verhältnissen für möglich.

mit seiner Berechnung nach reinen Quinten als Norm an. So lange man nur einstimmigen Gesang cultivirte, mag dies vollkommen genügt haben, Guido von Arezzo stellte die alten Intervalle auf verschiedene Arten auf dem Monochorde dar. Den ganzen Ton findet er dadurch, dass er die Saite des Monochordes in neun gleiche Theile theilt und von diesen acht Theile erklingen lässt. Um den folgenden Ton, also die grosse Terz des ersten zu finden, wird nun die bereits um $\frac{1}{9}$ verkürzte Saite abermals in neun Theile getheilt, hierdurch erhielt er nach Abzug eines Theiles $\frac{64}{81}$ der ganzen Saite, also das Verhältniss der pythagorischen Terz. Durch Theilung der Saite in vier Theile bekam er die Quarte, die Octave und die Octave der Octave u. s. w. Es ist dies, wie man sieht ein mechanisches Verfahren, hauptsächlich, um den Schülern die Grösse der Intervalle durch Saitenlängen klar zu machen.

Als man nun im zwölften Jahrhundert Versuche machte, mehrere neben einander laufende Stimmen zu einem mehrstimmigen Gesange zu verbinden, und hierbei das Bedürfniss fühlte über die Symphonien der Quinte und Quarte hinauszugehen und auch einigen anderen Intervallen das Recht der Consonanz einzuräumen, entstand natürlich ein Widerspruch zwischen Praxis und Theorie, und die Ansichten der Musiker waren sehr verschieden. Einige von ihnen rechneten die Terzen nebst ihren Umkehrungen, den Sexten, zu den Consonanzen; andere behaupteten dagegen, die Terzen seien zwar consonirend, doch müsse man die Sexten noch zu den Dissonanzen zählen. Noch andere machten einen Unterschied zwischen der grossen und der kleinen Terz, und zwischen der grossen und der kleinen Sexte, u. s. w. — Ueber die Eintheilung der Intervalle in Consonanzen und Dissonanzen bei den ältesten Mensuralisten habe ich in Nr. 11, 12 und 13 der Allgem. Musikal. Zeitung v. J. 1870 einen ausführlichen Artikel gebracht, in welchem gezeigt wird, wie Anfangs auf diesem Gebiete grosse Verwirrung herrschte, bis endlich die praktischen Musiker zu Anfang des fünfzehnten Jahrhunderts durch ihre Werke jene Intervallenlehre feststellten, welche den grossen Componisten des sechszehnten Jahrhunderts als Gesetz galt, und die wir auch heutzutage noch als Basis des mehrstimmigen Satzes ansehen müssen, wenn unsere Gesangscompositionen Halt und Form bekommen sollen.

Die Theorie hielt an ihren von den Alten überkommenen Berechnungen bis ins sechszehnte Jahrhundert hinein fest, weil sie nichts besseres an deren Stelle zu setzen wusste, bis endlich Zarlino das richtige

Verhältniss der Terzen und somit die einfachen natürlichen Zahlen für den Dur-Dreiklang 4 : 5 : 6 aufstellte. Hierdurch wurde die heutige Berechnungsart die allgemeinere, wenn auch einzelne Theoretiker den reinen Quinten zu lieb noch am Alten festhielten und selbst in der heutigen Zeit noch Stimmen zu Gunsten des alten »pythagorischen oder reinen Quintensystemes« laut werden.

---

§ 93.

Verzeichniss der in vorstehender Abhandlung vorkommenden Intervalle, nach der Grösse geordnet vom Einklang bis zur Octave.

1. Der Einklang. 1 : 1 = 1.
2. Das Schisma, um welches das pythagorische Komma grösser als das syntonische ist.
   32768 : 32805 = 1,001129.
3. Das Diaschima, welches um ein Schisma kleiner als das syntonische Komma ist. Dieses Intervall ist z. B. die Differenz zwischen der falschen Quinte (45 : 64) und dem Tritonus (32 : 45).
   2025 : 2048 = 1,011358.
4. Das syntonische Komma 80 : 81 = 1,0125.
5. Das pythagorische Komma, das Intervall, um welches sechs grosse ganze Töne oder zwölf Quinten grösser als die Octave sind.
   524288 : 531441 = 1,013643.
6. Das Intervall, um welches das unmusikalische Kirnberger'sche Intervall *i–c* (7 : 8) grösser als der grosse ganze Ton (8 : 9) ist. 63 : 64 = 1,015873.
7. Die kleine Diesis, welche man dadurch erhält, dass man die mittlere Diesis (125 : 128) von der kleineren Apotome (24 : 25) abzieht.
   3072 : 3125 = 1,017253.
8. Die mittlere Diesis, d. i. das Intervall, um welches das diatonische Limma (15 : 16) grösser als die kleinere Apotome (24 : 25) ist.
   125 : 128 = 1,024.

9. Das Intervall von zwei syntonischen Kommata, um welches die griechische Apotome (2048 : 2187) grösser als die kleine moderne Apotome (24 : 25) ist. 6400 : 6561 = 1,025156.
10. Die grosse Diesis oder die um ein syntonisches Komma (80 : 81) verminderte kleinere Apotome (24 : 25). 243 : 250 = 1,028806.
11. Der sogenannte Drittelton, d. i. das Intervall, um welches die kleinere Apotome (24 : 25) kleiner als das übermässige Limma (25 : 27) ist. Dieses Intervall erhält man auch als den Ueberschuss, den vier reine kleine Terzen (im Verh. 5 : 6) über die Octave geben. 625 : 648 = 1,0368.
12. Das um ein syntonisches Komma (80 : 81) verminderte pythagorische Limma (243 : 256). 19683 : 20480 = 1,040498.
13. Die kleinere moderne Apotome. 24 : 25 = 1,041666...
14. Das pythagorische Limma. 243 : 256 = 1,053498.
15. Die grössere moderne Apotome. 128 : 135 = 1,054687.
*16. Der gleichschwebend temperirte halbe Ton. * = 1,059463.
17. Das moderne diatonische Limma oder der sogenannte grosse halbe Ton. 15 : 16 = 1,066666...
18. Die griechische oder pythagorische Apotome. 2048 : 2187 = 1,067871.
19. Das übermässige Limma. 25 : 27 = 1,08.
20. Der um ein syntonisches Komma verminderte kleine ganze Ton. 729 : 800 = 1,097394.
21. Das Intervall von zwei pythagorischen Limmata ($243^2 : 256^2$), welches um ein pythagorisches Komma (524288 : 531441) kleiner als der grosse ganze Ton (8 : 9) ist. 59048 : 65536 = 1,109858.
22. Der kleine ganze Ton. 9 : 10 = 1,111111...
*23. Der gleichschwebend temperirte ganze Ton. * = 1,122460.
24. Der grosse ganze Ton. 8 : 9 = 1,125.

25. Die verminderte Terz, bestehend aus zwei diatonischen Limmata ($15^2 : 16^2$). Dasselbe Intervall erhält man auch, wenn man von der kleinen Terz (5 : 6) die grössere moderne Apotome (128 : 135) abzieht. 225 : 256 = 1,137777...

26. Das aus zwei griech. Apotomen ($2048^2 : 2187^2$) bestehende Intervall, oder der um ein pythagorisches Komma (524288 : 531441) zu grosse grosse ganze Ton (8 : 9).
4194304 : 4782969 = 1,140349.

27. Das KIRNBERGER'sche Intervall von *i* nach *c**). 7 : 8 = 1,142857.

28. Die verminderte Terz, welche man dadurch erhält, dass man die kleinere moderne Apotome (24 : 25) von der kleinen Terz (5 : 6) abzieht. Dieses Intervall besteht aus einem gewöhnlichen diatonischen Limma (15 : 16) und einem sogenannten übermässigen (25 : 27).
125 : 144 = 1,152.

29. Die übermässige Secunde, welche aus dem kleinen ganzen Ton (9 : 10) und der kleineren modernen Apotome (24 : 25) besteht.
108 : 125 = 1,157407.

---

*) Von dem FASCH-KIRNBERGER'schen sogenannten consonirenden Vierklang *c–e–g–i* (4 : 5 : 6 : 7), welcher mit den musikalischen Intervallen in keinem Zusammenhange steht, habe ich nur das Intervall *c–i* mit seiner Umkehrung, sowie das Komma 63 : 64, um welches 7 : 8 grösser als 8 : 9 ist, hier aufgenommen. Es versteht sich von selbst, dass in der Zahlenreihe 4 : 5 : 6 : 7 noch folgende Intervalle enthalten sind: *e–i*, eine etwas zu kleine verminderte Quinte, 5 : 7 = 1,4. Ferner *g–i*, eine etwas verminderte kleine Terz, 6 : 7 = 1,166666... Dann, wenn man noch die None *d* hinzufügt das Intervall *i–d*, eine grosse Terz, die um ein wenig grösser als die pythagorische grosse Terz ist, 7 : 9 = 1,266666... Dazu kommen die Umkehrungen der genannten Intervalle. Dann liegt es nahe zu untersuchen, was der Ton *i* mit der neben ihm stehenden Stufe *a* für ein Intervall bildet. Dies erhalten wir, wenn wir den kleinen ganzen Ton 9 : 10 von dem terzenähnlichen Intervall 6 : 7 abziehen, 20 : 21 = 1,05; es ist dies ein Intervall etwas grösser als die kleinere moderne Apotome und etwas kleiner als das pythagorische Limma. Nun können wir aber auch von 6 : 7 den grossen ganzen Ton abziehen und erhalten dann 27 : 28 = 1,037037, ein Intervall, welches in dem Verzeichniss zwischen No. 11 und 12 seinen Platz finden würde, u. s. w. — Ferner ist noch zu bemerken, dass die in den alten Klanggeschlechtern und χρόαι enthaltenen Verhältnisse ebenfalls in dem Verzeichniss keinen Platz gefunden haben, da sie als willkührliche Annahmen der alten Theoretiker selbst unter einander keinen Zusammenhang haben.

30. Die verminderte Terz, welche aus zwei übermässigen Limmata ($25^2 : 27^2$) zusammengesetzt ist. 625 : 729 = 1,1664.

31. Die übermässige Secunde, bestehend aus dem grossen ganzen Tone (8 : 9) und der kleineren Apotome (24 : 25) — oder aus dem kleinen ganzen Ton (9 : 10) und der grösseren Apotome (128 : 135). 64 : 75 = 1,171875.

32. Die unreine oder pythagorische kleine Terz.
27 : 32 = 1,185185.

33. Die übermässige Secunde, welche aus dem grossen ganzen Tone (8 : 9) und der grösseren Apotome (128 : 135) besteht. 1024 : 1215 = 1,186523.

*34. Die gleichschwebend temperirte kleine Terz.
* = 1,189206.

35. Die kleine Terz. 5 : 6 = 1,2.

36. Die kleine Terz, welche um ein syntonisches Komma (80 : 81) zu gross ist. 80 : 100 = 1,234568.

37. Die grosse Terz. 4 : 5 = 0,25.

*38. Die gleichschwebend temperirte grosse Terz.
* = 1,259920.

39. Die verminderte Quarte, welche um die grössere moderne Apotome (128 : 135) kleiner als die reine (3 : 4) ist. 405 : 512 = 1,264198.

40. Die pythagorische grosse Terz, bestehend aus zwei grossen ganzen Tönen ($8^2 : 9^2$).
64 : 81 = 1,265625.

41. Die verminderte Quarte, welche um eine kleinere moderne Apotome (24 : 25) kleiner als die reine (3 : 4) ist. 25 : 32 = 1,28.

42. Die verminderte Quarte, welche man dadurch erhält, dass man von der in der diatonischen Tonleiter enthaltenen unreinen Quarte (20 : 27) die kleinere moderne Apotome (24 : 25) abzieht.
125 : 162 = 1,296.

43. Die reine Quarte. 3 : 4 = 1,333333...

*44. Die gleichschwebend temperirte reine Quarte.
* = 1,334839.

45. Die um ein syntonisches Komma zu grosse Quarte. 20 : 27 = 1,35.

46. Der Tritonus, welcher aus zwei kleinen ganzen Tönen ($9^2 : 10^2$) und einem grossen ganzen Tone (8 : 9) besteht. 18 : 25 = 1,388888...

47. Die falsche Quinte nach der Berechnung der Alten, wonach sie aus zwei grossen ganzen Tönen und zwei pythagorischen Limmata [($243^2 : 256^2$) . ($8^2 : 9^2$)] besteht. Dasselbe Zahlenverhältniss erhält man, wenn man dies Intervall nach moderner Weise berechnet und zwei kleine ganze Töne und zwei gewöhnliche diatonische Limmata [($15^2 : 16^2$) . ($9^2 : 10^2$)] annimmt. 729 : 1024 = 1,404595.

48. Der Tritonus, wie er in der modernen diatonischen Tonleiter vorkommt, bestehend aus zwei grossen ($8^2 : 9^2$) und einem kleinen ganzen Tone (9 : 10). 32 : 45 = 1,40625.

*49. Die Mitte der Octave, welche nach der gleichschwebenden Temperatur als Tritonus und zugleich als verminderte oder falsche Quinte gebraucht wird. * = 1,414212.

50. Die Umkehrung von Nr. 48, d. i. die falsche oder verminderte Quinte, wie sie in der modernen diatonischen Tonleiter vorkommt, bestehend aus zwei diatonischen Limmata ($15^2 : 16^2$), einem kleinen ganzen Ton (9 : 10) und einem grossen ganzen Ton (8 : 9). 45 : 64 = 1,422222..

51. Die Umkehrung von Nr. 47, d. i. der aus drei grossen ganzen Tönen bestehende Tritonus ($8^3 : 9^3$), wie er in der pythagorischen Scala vorkommt. 512 : 729 = 1,42375.

52. Die Umkehrung von Nr. 46, d. i. die verminderte oder falsche Quinte, welche aus zwei diatonischen Limmata ($15^2 : 16^2$) und zwei grossen ganzen Tönen ($8^2 : 9^2$) besteht. 25 : 36 = 1,44.

53. Die Umkehrung von Nr. 45, d. i. die um ein syntonisches Komma (80 : 81) zu kleine oder unreine Quinte. 27 : 40 = 1.481481.

*54. Die Umkehrung von Nr. 44, d. i. die gleichschwebend temperirte reine Quinte.
* = 1,498306.

55. Die reine Quinte, (die Umkehrung von Nr. 43).
2 : 3 = 1,5.

56. Die Umkehrung von Nr. 42, d. i. die (kleinste) übermässige Quinte, welche man dadurch erhält, dass man der in der diatonischen Tonleiter enthaltenen unreinen Quinte (27 : 40) eine kleinere Apotome (24 : 25) hinzufügt.
81 : 125 = 1,543210.

57. Die Umkehrung von Nr. 41, d. i. die übermässige Quinte, welche um die kleinere Apotome (24 : 25) grösser als die reine (2 : 3) ist.
16 : 25 = 1,5625.

58. Die Umkehrung von Nr. 40, d. i. die kleine Sexte beim Pythagoras, bestehend aus drei grossen ganzen Tönen und zwei pythagorischen Limmata [($8^3 : 9^3$) . ($243^2 : 256^2$)].
81 : 128 = 1,580247.

59. Die Umkehrung von Nr. 39, d. i. die übermässige Quinte, welche um die grössere Apotome (128 : 135) grösser als die reine Quinte (2 : 3) ist. 256 : 405 = 1,582031.

*60. Die Umkehrung von Nr. 38, die gleichschwebend temperirte kleine Sexte. * = 1,587400.

61. Die Umkehrung von Nr. 37, die kleine Sexte.
5 : 8 = 1,6.

62. Die Umkehrung von Nr. 36, d. i. die um ein syntonisches Komma (80 : 81) zu kleine grosse Sexte. 50 : 81 = 1,62.

63. Die Umkehrung von Nr. 35, die grosse Sexte.
3 : 5 = 1,666666...

*64. Die Umkehrung von Nr. 34, d. i. die gleichschwebend temperirte grosse Sexte. * = 1,681790.

65. Die Umkehrung von Nr. 33, d. i. die verminderte Septime, welche man dadurch erhält, dass man von der Umkehrung des grossen ganzen Tones (9 : 16) die grössere Apotome (128 : 135) abzieht. 1215 : 2048 = 1,684734.

66. Die Umkehrung von Nr. 32, d. i. die grosse Sexte, welche um ein syntonisches Komma (80 : 81) zu gross ist, wie sie in der alten Scala vorkommt. 16 : 27 = 1,69375.

67. Die Umkehrung von Nr. 31, d. i. die verminderte Septime, welche um eine kleinere Apotome (24 : 25) kleiner als das Verhältniss 9 : 16 ist. 75 : 128 = 1,706666...

68. Die Umkehrung von Nr. 30, d. i. die übermässige Sexte, welche man dadurch erhält, dass man zwei übermässige Limmata ($25^2 : 27^2$) von der Octave (1 : 2) abzieht.
729 : 1250 = 1,714678.

69. Die Umkehrung von Nr. 29, d. i. die aus drei reinen kleinen Terzen ($5^3 : 6^3$) bestehende verminderte Septime. 125 : 216 = 1,728.

70. Die Umkehrung von No. 28, d. i. die übermässige Sexte, bestehend aus dem Verhältniss 3 : 5 und der kleineren Apotome (24 : 25).
72 : 125 = 1,736111...

71. Die Umkehrung von Nr. 27, das Intervall *c-i*.
4 : 7 = 1,75.

72. Die Umkehrung von Nr. 26, d. h. die Umkehrung des aus zwei griechischen Apotomen bestehenden Intervalles, d. i. eine Octave (1 : 2), von der zwei griechische Apotomen ($2048^2 : 2187^2$) abgezogen sind.
4782969 : 8388608 = 1,753850.

73. Die Umkehrung von Nr. 25, d. i. die übermässige Sexte, bestehend aus dem Verhältniss 3 : 5 und der grösseren modernen Apotome (128 : 135). 128 : 225 = 1,757812.

74. Die Umkehrung von Nr. 24, d. i. die kleine Septime, die Umkehrung des grossen ganzen Tones 8 : 9. 9 : 16 = 1,777777...

*75. Die Umkehrung von Nr. 23, d. i. die gleichschwebend temperirte kleine Septime.
* = 1,781769.

76. Die Umkehrung von Nr. 22, d. i. die kleine Septime, die Umkehrung des kleinen ganzen Tones (9 : 10). 5 : 9 = 1,8.

77. Die Umkehrung von Nr. 21, d. i. eine Octave, von welcher zwei pythag. Limmata ($243^2 : 256^2$) abgezogen sind. 32768 : 59049 = 1,802031.

78. Die Umkehrung von Nr. 20, d. i. die um ein syntonisches Komma zu grosse kleine Septime, nämlich $\frac{9}{5} \cdot \frac{81}{80}$. 400 : 729 = 1,8225.

79. Die Umkehrung von Nr. 19, d. i. eine Octave, von welcher man ein übermässiges Limma (25 : 27) abgezogen hat. 27 : 50 = 1,851852.

80. Die Umkehrung von Nr. 18, d. i. die Umkehrung der griechischen Apotome.
2187 : 4096 = 1,872885.

81. Die Umkehrung von Nr. 17, d. i. die grosse Septime, die Umkehrung des diatonischen Limmas 15 : 16. 8 : 15 = 1,875.

*82. Die Umkehrung von Nr. 16, d. i. die gleichschwebend temperirte grosse Septime.
* = 1,887746.

83. Die Umkehrung von Nr. 15, d. i. die verminderte Octave, die Umkehrung der grösseren Apotome. 135 : 256 = 1,896296.

84. Die Umkehrung von Nr. 14, die grosse Septime bei den Alten, d. h. die Umkehrung des pythagorischen Limmas 243 : 256.
128 : 243 = 1,898437.

85. Die Umkehrung von Nr. 13, die verminderte Octave oder die Umkehrung der kleineren Apotome. 25 : 48 = 1,92.

86. Die Umkehrung von Nr. 12, d. i. die Octave nach Abzug eines um ein syntonisches Komma verminderten pythagorischen Limmas.
10240 : 19683 = 1,922168.

87. Die Umkehrung von Nr. 11, d. i. die um einen Drittelton verminderte Octave.
324 : 625 = 1,925926.

88. Die Umkehrung von Nr. 10, d. i. die um die grosse Diesis verminderte Octave.
125 : 243 = 1,944.

89. Die Umkehrung von Nr. 9, d. i. die um zwei syntonische Kommata verminderte Octave.
6561 : 12800 = 1,950922.

90. Die Umkehrung von Nr. 8, d. i. die um die mittlere Diesis verminderte Octave.
64 : 125 = 1,953125.

91. Die Umkehrung von Nr. 7, d. i. die um die kleine Diesis verminderte Octave.
3125 : 6144 = 1,96608.

92. Die Umkehrung von Nr. 6, d. i. die um das Verhältniss 63 : 64 verminderte Octave. 32 : 63 = 1,96875.

93. Die Umkehrung von Nr. 5, d. i. die um ein pythagorisches Komma verminderte Octave.
531441 : 1048576 = 1,973081.

94. Die Umkehrung von Nr. 4, d. i. die um ein syntonisches Komma verminderte Octave.
81 : 160 = 1,975309.

95. Die Umkehrung von Nr. 3, d. i. die um ein Diaschisma verminderte Octave.
1024 : 2025 = 1,976660.

96. Die Umkehrung von Nr. 2, d. i. die um ein Schisma verminderte Octave.
32805 : 65536 = 1,997744.

97. Die Octave. 1 : 2 = 2.

§ 94.

Anhang.

Wenn man ein graphisches Bild der Tonleiter entwerfen und also auf einer geraden Linie den musikalischen Intervallen gemäss Strecken von verschiedener Länge abtragen will, so handelt es sich zunächst um das Gesetz, nach welchem die Zahlenwerthe dieser Strecken von den Schwingungsverhältnissen der Töne, zwischen denen die Intervalle liegen, abhängig zu machen sind. Die Schwingungszahlen selber dürfen wir hierzu nicht wählen. Denn wenn z. B. der Grundton eine Schwingung macht, so macht die Octave zwei, deren Octave vier, die nachfolgende Octave acht Schwingungen u. s. f., und die zwischen diesen Tönen liegenden Intervalle würden durch Strecken dargestellt werden, welche der Reihe nach die Werthe 1, 2, 4 u. s. f. haben, während wir doch, unserer Empfindung folgend, uns alle diese Intervalle als einander gleich vorstellen. Dass wir unter Anwendung der Schwingungszahlen zu einem Bilde gelangen, das so wesentlich von dem in unserer Vorstellung verschieden ist, hat darin seinen Grund, dass wir bei der Zusammensetzung zweier Schwingungsverhältnisse und bei der zweier Intervalle wesentlich verschiedene Rechnungsarten anwenden. Bei jenen multipliciren wir, bei diesen addiren wir. Und hierin sehen wir auch, in welcher Art die Streckenzahlen von den Verhältnisszahlen abhängen müssen. Sie müssen die Logarithmen von diesen sein. Denn für die Logarithmen gilt das Gesetz: »Der Logarithmus eines Productes ist gleich der Summe der Logarithmen seiner Factoren«. Für jede Basis ist folgende Gleichung richtig:

$$\log (ab) = \log a + \log b.$$

Wir würden nun unsern Zweck mit jedem logarithmischen System erreichen, aber am übersichtlichsten scheint die Tonleiter sich zu gestalten, wenn man zur Einheit diejenige Länge wählt, welche dem gleichschwebend-temperirten halben Tone entspricht. Dann erhält man für die Octave 12, und da der Octave das Schwingungsverhältniss 1 : 2 zukommt, zur Bestimmung der Basis folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \log 2 &= 12 \text{ für Basis } x \\ x^{12} &= 2 \\ x &= \sqrt[12]{2} = 1{,}0594630. \end{aligned}$$

Man sieht, die Basis ist das Schwingungsverhältniss des gleichschwebend-temperirten halben Tones.

Was die Berechnung der einzelnen Strecken anbelangt, so ist folgendes zu bemerken: Wie sich die sämmtlichen Schwingungsverhältnisse der reinen oder natürlichen Tonleiter durch Multiplication und Division der Primzahlen 2, 3, 5 und, wenn wir das Fasch-Kirnberger'sche Intervall *i* mit in Betracht ziehen, auch noch der Zahl 7 zusammensetzen, so erhält man analog die Werthe aller Strecken durch Addition und Subtraction der Logarithmen von eben diesen drei, beziehungsweise vier, Zahlen. Wir brauchen uns also nur für diese die Logarithmen zu verschaffen. Hierbei ist oben festgestellt worden, dass der Logarithmus der Zahl 2 gleich 12 sein soll. Die andern drei finden wir aus den Briggs'schen Logarithmen, nach dem Satz, dass die Logarithmen zweier Zahlen in dem einen System sich zu einander verhalten wie die Logarithmen derselben Zahlen in einem anderen System. Demnach haben wir für $x = log\ 3$ *für Basis* $\sqrt[12]{2}$:

$$x : 12 = 0{,}47712125472 : 0{,}30102999566,$$

worin die beiden letzten Zahlen die Briggs'schen Logarithmen von 3 und 2 sind; also

$$x = \frac{12 \cdot 0{,}47712125472}{0{,}30102999566}$$

Ebenso werden die Logarithmen der anderen berechnet, man erhält also:

$$\left.\begin{array}{l} log\ 2 = 12 \\ log\ 3 = 19{,}01955005 \\ log\ 5 = 27{,}86313714 \\ log\ 7 = 33{,}68825910 \end{array}\right\} \textit{für die Basis } \sqrt[12]{2}$$

Um z. B. die Strecke für die Quinte $\frac{3}{2}$ zu finden, ist folgende Rechnung nöthig:

$$\begin{array}{l} log\ 3 = 19{,}01955005 \\ log\ 2 = 12 \\ \hline log\ \frac{3}{2} = 7{,}01955005, \text{ die Quinte} \end{array}$$

Für die grosse Terz $\frac{5}{4} = \frac{5}{2^2}$:

$$\begin{array}{r} log\ 5 = 27{,}86313714 \\ log\ 4 = log\ 2^2 = 2\ log\ 2 = 24 \phantom{{,}86313714} \\ \hline \text{die grosse Terz} = 3{,}86313714 \end{array}$$

Für den kleinen ganzen Ton $= \frac{10}{9} = \frac{2 \cdot 5}{3^2}$

$$\log 2 + \log 5 - 2 \log 3.$$

$$\begin{aligned} \log 2 &= 12 \\ \log 5 &= \underline{27{,}86313714} \\ & 39{,}86313714 \\ 2 \log 3 &= \underline{38{,}03910010} \\ \text{der kleine ganze Ton} &= \underline{1{,}82403704.} \end{aligned}$$

Den grossen ganzen Ton können wir entweder direct als das Verhältniss 8 : 9 bestimmen, nämlich:

$$\frac{9}{8} = \frac{3^2}{2^3}$$

$$\begin{aligned} & 2 \log 3 - 3 \log 2. \\ 2 \log 3 &= 38{,}03910010 \\ 3 \log 2 &= \underline{36 \qquad\qquad} \\ \log \tfrac{9}{8} &= \underline{2{,}03910010} \text{ der grosse ganze Ton.} \end{aligned}$$

Oder wir finden ihn, indem wir den kleinen ganzen Ton von der grossen Terz abziehen, beide Intervalle haben wir bereits berechnet:

$$\begin{aligned} \text{Die grosse Terz} &= \log \tfrac{5}{4} = 3{,}86313714 \\ \text{der kleine ganze Ton} &= \log \tfrac{10}{9} = \underline{1{,}82403704} \\ \text{der grosse ganze Ton} &= \log \tfrac{9}{8} = \underline{2{,}03910010.} \end{aligned}$$

In dieser Weise sind in der nachstehenden Tabelle sämmtliche Intervalle des vorangehenden Verzeichnisses (§ 93) berechnet worden, wobei diejenigen Intervalle, von denen das eine die Umkehrung des andern ist, gegenübergestellt sind, z. B. Nr. 17 (1,11731281) der diatonische Halbton oder das Limma, die Umkehrung Nr. 81 (10,88268719) die grosse Septime. Beide addirt müssen die Zahl 12 geben,

$$\begin{aligned} 1{,}11731281 &= \text{Limma,} \\ \underline{10{,}88268719} &= \text{grosse Septime,} \\ \underline{12{,}00000000} &= \text{Octave.} \end{aligned}$$

Die beigegebene Zeichnung, welche den Raum einer grossen Terz umfasst, ist genau nach dem Meter-Maass entworfen.

100 Millimeter = 1 temperirten Halbton,

200 Millimeter = 2 temperirten Halbtönen u. s. f.

Das Schisma, welches durch 0,0195 ausgedrückt ist, nimmt auf dieser Scala also beinahe 2 Millimeter ein, das Diaschisma (0,1955) ein wenig mehr als $19\frac{1}{2}$ Millimeter, die kleinere Apotome (0,7076) etwas mehr als $70\frac{3}{4}$ Millimeter, das diatonische Limma (1,1173) beinahe $111\frac{3}{4}$ Milli-

meter, der grosse ganze Ton (2,0391) beinahe 204 Millimeter u. s. f. — Die Durchführung sämmtlicher 97 Intervalle bis zur Octave würde 1,2 Meter umfassen, eine Strecke, die für das Format dieses Büchleins zu gross ist, weshalb wir die weitere Ausführung der Scala dem Leser selbst überlassen müssen.

Tabelle für die bildliche Darstellung der Intervalle.

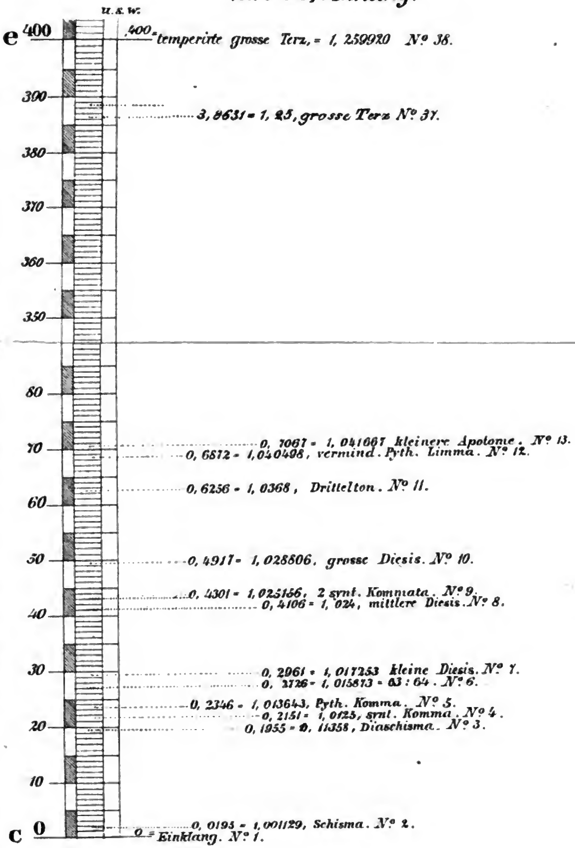
Nr. 1	**= 0 = *c*.**	**Nr. 97**	**= 12 = *c***
2	= 0,01953754	96	= 11,98046246
3	= 0,19552552	95	= 11,90447448
4	= 0,21506306	94	= 11,78493684
5	= 0,23460060	93	= 11,76539940
6	= 0,27264080	92	= 11,72735920
7	= 0,29613565	91	= 11,70386435
8	= 0,41058858	90	= 11,58941142
9	= 0,43012612	89	= 11,56987388
10	= 0,49166117	88	= 11,50833883
11	= 0,62565164	87	= 11,37434836
12	= 0,68718669	86	= 11,31281331
13	= 0,70672423	85	= 11,29327577
14	= 0,90224975	84	= 11,09775025
15	= 0,92178729	83	= 11,07821271
***16**	**= 1 = *cis*** oder ***des***	***82**	**= 11 = *h*** temperirt
17	= 1,11731281	81	= 10,88268719
18	= 1,13685036	80	= 10,86314964
19	= 1,33237587	79	= 10,66762413
20	= 1,60897398	78	= 10,39102602
21	= 1,80449950	77	= 10,19550050
22	= 1,82403704	76	= 10,17596296
***23**	**= 2 = *d*** temperirt	***75**	**= 10 = *b*** oder ***ais***
24	= 2,03910010	74	= 9,96089990
25	= 2,23462562	73	= 9,76537438
26	= 2,27370070	72	= 9,72629930
27	= 2,31174090	71	= 9,68825910
28	= 2,44968868	70	= 9,55031132
29	= 2,53076126	69	= 9,46923874
30	= 2,66475174	68	= 9,33524826
31	= 2,74582433	67	= 9,25417567

Nr. 32	= 2,94134985	Nr. 66	= 9,05865015
33	= 2,96088739	65	= 9,03911261
*34	= 3 = *es* oder *dis*	*64	= 9 = *a* temp.
35	= 3,15641291	63	= 8,84358709
36	= 3,37147597	62	= 8,62852403
37	= 3,86313714	61	= 8,13686286
*38	= 4 = *e* temp.	*60	= 8 = *gis* oder *as*
39	= 4,05866266	59	= 7,94133734
40	= 4,07820020	58	= 7,92179980
41	= 4,27372572	57	= 7,72627428
42	= 4,48878878	56	= 7,51121122
43	= 4,98044995	55	= 7,01955005
*44	= 5 = *f* temp.	*54	= 7 = *g* temp.
45	= 5,19551301	53	= 6,80448699
46	= 5,68717418	52	= 6,31282582
47	= 5,88269970	51	= 6,11730030
48	= 5,90223724	50	= 6,09776276

*49 = *fis* oder *ges* = *b* (die Mitte).

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

Zu § 94, Anhang.



u. s. w.
e 400
400 = temperirte grosse Terz, = 1, 259920 N° 38.
390
3, 8631 = 1, 25, grosse Terz N° 37.
380
370
360
350
80
0, 7061 = 1, 041667 kleinere Apotome. N° 13.
0, 6812 = 1,040498, vermind. Pyth. Limma. N° 12.
70
0, 6256 = 1, 0368, Drittelton. N° 11.
60
0, 4917 = 1, 028806, grosse Diesis. N° 10.
50
0, 4301 = 1, 025156, 2 synt. Kommata. N° 9.
0, 4106 = 1, 024, mittlere Diesis. N° 8.
40
0, 2961 = 1, 017253 kleine Diesis. N° 7.
30
0, 2726 = 1, 015873 = 63 : 64. N° 6.
0, 2346 = 1, 013643, Pyth. Komma. N° 5.
0, 2151 = 1, 0125, synt. Komma. N° 4.
0, 1955 = 0, 11358, Diaschisma. N° 3.
20
10
0, 0195 = 1, 001129, Schisma. N° 2.
c 0
0 = Einklang. N° 1.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.